Civil Services (Main) Examination- 2025

SLPM–B–MTH

गणित (प्रश्न-पत्र–II)

निर्धारित समय : तीन घण्टे

अधिकतम अंक : 250

प्रश्न-पत्र संबंधी विशिष्ट अनुदेश

(कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़िए)

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेजी** दोनों में छपे हुए हैं।

परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू० सी० ए०) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए, तथा उनको स्पष्टतया निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।

MATHEMATICS (PAPER–II)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 250

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

(Please read each of the following instructions carefully before attempting questions)

There are EIGHT questions divided in two Sections and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड—A / SECTION—A

1. (a) माना एक समूह G के दो उपसमूह H और K इस प्रकार हैं कि $o(H) > \sqrt{o(G)}$ और $o(K) > \sqrt{o(G)}$ हैं। दर्शाइए कि $H \cap K \neq \{e\}$ है, जहाँ e तत्समक अवयव है। यहाँ $o(H)$, $o(K)$ और $o(G)$ क्रमशः H, K और G की कोटि को दर्शाते हैं।

Let H and K be two subgroups of a group G such that $o(H) > \sqrt{o(G)}$ and $o(K) > \sqrt{o(G)}$. Show that $H \cap K \neq \{e\}$, where e is the identity element. Here $o(H)$, $o(K)$ and $o(G)$ denote the order of H, K and G respectively. 10

(b) माना $G = \{e, x, x^2, y, yx, yx^2\}$ एक अन्-आबेली समूह है तथा $o(x) = 3$ और $o(y) = 2$ हैं। दर्शाइए कि $xy = yx^2$ है (जहाँ e, समूह G का तत्समक अवयव है और $o(x)$, $o(y)$ क्रमशः अवयवों x, y की कोटि को दर्शाते हैं)।

Let $G = \{e, x, x^2, y, yx, yx^2\}$ be a non-Abelian group with $o(x) = 3$ and $o(y) = 2$. Show that $xy = yx^2$ (where e is the identity element of G and $o(x)$, $o(y)$ denote the order of the elements x, y respectively). 10

(c) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ के निरपेक्षतः या सापेक्ष अभिसारी होने की जाँच कीजिए।

Examine whether the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ is absolutely or conditionally convergent. 10

(d) $1 < |z| < 3$ के लिए $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ का एक लौराँ श्रेणी में प्रसार कीजिए।

Expand $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ in a Laurent series valid for $1 < |z| < 3$. 10

(e) समीकरण निकाय

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6$$

$$4x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 10$$

के कितने आधारी हल हैं? उन सभी को ज्ञात कीजिए। उन आधारी हलों की संख्या भी ज्ञात कीजिए जो सुसंगत/असुसंगत/अनपभ्रष्ट हैं।

How many basic solutions are there for the following system of equations?

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6$$
$$4x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 10$$

Find all of them. Furthermore, find the number of basic solutions, which are feasible/non-feasible/non-degenerate. 10

2. (a) कौशी अनुक्रम की परिभाषा दीजिए और सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं का प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम एक कौशी अनुक्रम है। कौशी की शर्त का क्या महत्त्व है?

Define Cauchy sequence and prove that every convergent sequence of real numbers is a Cauchy sequence. What is the importance of Cauchy condition? 15

(b) दर्शाइए कि पूर्णांकीय प्रांत $Z[i]$ में 3 एक अखंडनीय अवयव है।

Show that 3 is an irreducible element in the integral domain $Z[i]$. 15

(c) कन्टूर समाकलन की विधि से सिद्ध कीजिए कि $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx = \frac{5\pi}{12}$ है।

Use the method of contour integration to prove that $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx = \frac{5\pi}{12}$. 20

3. (a) समाकल $\oint_C \frac{e^z}{z^2 (z+1)^3} dz,\ C : |z| = 2$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate the integral $\oint_C \frac{e^z}{z^2 (z+1)^3} dz,\ C : |z| = 2$. 15

(b) सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के अंतर्गत सबसे बड़े समकोणिक समांतरषट्फलक का आयतन $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$ है।

Show that the volume of the greatest rectangular parallelopiped that can be inscribed in the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ is $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$. 20

(c) द्वैतता (ड्यूअलिटी) के सिद्धान्त का उपयोग कर निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए :

अधिकतमीकरण कीजिए $Z = 3x_1 + 4x_2$

बशर्ते कि

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 - 3x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Apply the principle of duality to solve the following linear programming problem :

Maximize $Z = 3x_1 + 4x_2$

subject to the constraints

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 - 3x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

15

4. (a) जाँचिए कि क्या $f(x) \in Z[x]$ के लिए $\phi(f(x)) = f(0)$ द्वारा परिभाषित प्रतिचित्रण $\phi : Z[x] \to Z$ एक समाकारिता है। निगमन कीजिए कि गुणजावली $\langle x \rangle$, $Z[x]$ में एक अभाज्य गुणजावली है, किन्तु $Z[x]$ में एक उच्चिष्ठ गुणजावली नहीं है।

Examine whether the mapping $\phi : Z[x] \to Z$ defined by $\phi(f(x)) = f(0)$, for $f(x) \in Z[x]$, is a homomorphism. Deduce that the ideal $\langle x \rangle$ is a prime ideal in $Z[x]$, but not a maximal ideal in $Z[x]$.

15

(b) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक सतत फलन रीमान समाकलनीय है।

Prove that every continuous function is Riemann integrable. 15

(c) निम्न सारणी में प्रत्येक गोदाम में उपलब्ध सप्लाई, प्रत्येक बाजार की आवश्यकता और प्रत्येक गोदाम से प्रत्येक बाजार की इकाई परिवहन लागत की सभी आवश्यक जानकारी दी गई है :

बाजार

		I	II	III	IV	सप्लाई
	A	5	2	4	3	22
गोदाम	B	4	8	1	6	15
	C	4	6	7	5	8
आवश्यकता		7	12	17	9	

अनुभव के आधार पर शिपिंग क्लर्क ने निम्न अनुसूची (शेड्यूल) तैयार की है :

A से *II* पर 12 इकाई, *A* से *III* पर 1 इकाई, *A* से *IV* पर 9 इकाई, *B* से *III* पर 15 इकाई, *C* से *I* पर 7 इकाई और *C* से *III* पर 1 इकाई

इष्टतम अनुसूची और निम्नतम कुल परिवहन लागत ज्ञात कीजिए।

The following table shows all the necessary information on the available supply to each warehouse, the requirement of each market and the unit transportation cost from each warehouse to each market :

Market

		I	II	III	IV	Supply
	A	5	2	4	3	22
Warehouse	B	4	8	1	6	15
	C	4	6	7	5	8
Requirement		7	12	17	9	

The shipping clerk has worked out the following schedule from experience :

12 units from *A* to *II*, 1 unit from *A* to *III*, 9 units from *A* to *IV*, 15 units from *B* to *III*, 7 units from *C* to *I* and 1 unit from *C* to *III*

Find the optimal schedule and minimum total shipping cost. 20

खण्ड—B / SECTION—B

5\. (a) समीकरण $(D^2 + DD' - 2D^2)\, z = y \sin x$, जहाँ $D \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ और $D' \equiv \frac{\partial}{\partial y}$ हैं, का हल ज्ञात कीजिए।

Find the solution of the equation $(D^2 + DD' - 2D^2)\, z = y \sin x$, where $D \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ and $D' \equiv \frac{\partial}{\partial y}$. 10

(b) निम्न रैखिक समीकरण निकाय को गाउस-सीडल विधि से हल कीजिए :

$$\begin{aligned} 10x + 2y + z &= 9 \\ 2x + 20y - 2z &= -44 \\ -2x + 3y + 10z &= 22 \end{aligned}$$

Solve the following system of linear equations by Gauss-Seidel method :

$$\begin{aligned} 10x + 2y + z &= 9 \\ 2x + 20y - 2z &= -44 \\ -2x + 3y + 10z &= 22 \end{aligned}$$

10

(c) (i) संख्या $(3479)_{10}$ को द्वि-आधारी पद्धति और संख्या $(7\text{AE}\cdot 9\text{F})_{16}$ को दशमलव पद्धति में बदलिए।

Convert the number $(3479)_{10}$ into binary system and the number $(7\text{AE}\cdot 9\text{F})_{16}$ into decimal system.

(ii) बूलीय फलन $F(x, y, z) = (x + y + z')(x' + y')$ के लिए सत्यमान सारणी ज्ञात कीजिए। सत्यमान सारणी से $F(x, y, z)$ का पूर्ण वियोजनीय प्रसामान्य रूप भी प्राप्त कीजिए।

Determine the truth table for the Boolean function

$$F(x, y, z) = (x + y + z')(x' + y')$$

Also derive the full disjunctive normal form of $F(x, y, z)$ from the truth table. 10

(d) $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1+\cos\theta)$, $(0 \le \theta \le 2\pi)$ द्वारा दिए गए एक चक्रज के रूप में एक घर्षणहीन तार पर m द्रव्यमान का एक मनका फिसलता है। लग्रांजी फलन ज्ञात कीजिए। अतः दर्शाइए कि गति का समीकरण

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{g}{4a}u = 0$$

के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ $u = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ है।

A bead of mass m slides on a frictionless wire in the shape of a cycloid given by $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1+\cos\theta)$, $(0 \le \theta \le 2\pi)$. Find the Lagrangian function. Hence show that the equation of motion can be written as

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{g}{4a}u = 0$$

where $u = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

4+6=10

(e) बराबर सामर्थ्य के एक स्रोत और एक अभिगम एक निश्चित वृत्तीय सीमा $x^2 + y^2 = a^2$ के अंतर्गत बिंदुओं $\left(\pm\frac{a}{2}, 0\right)$ पर रखे हैं। दर्शाइए कि धारारेखाएँ

$$\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right)(r^2 - 4a^2) - 4a^2y^2 = ky(r^2 - a^2)$$

द्वारा दी जाती हैं, जहाँ k एक अचर है और $r^2 = x^2 + y^2$ है।

A source and a sink of equal strength are placed at points $\left(\pm\frac{a}{2}, 0\right)$ within a fixed circular boundary $x^2 + y^2 = a^2$. Show that the streamlines are given by

$$\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right)(r^2 - 4a^2) - 4a^2y^2 = ky(r^2 - a^2)$$

where k is a constant and $r^2 = x^2 + y^2$.

10

6. *(a)* एक आयताकार प्लेट के लिए $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ को परिसीमा प्रतिबन्धों

$$u(0, y)=0, \quad u(a, y)=0$$

$$u(x, 0)=0, \quad u(x, b)=f(x)$$

के अधीन हल कीजिए।

Solve $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ for a rectangular plate subject to the boundary conditions

$$u(0, y)=0, \quad u(a, y)=0$$

$$u(x, 0)=0, \quad u(x, b)=f(x)$$ 20

(b) बूलीय फलन

$$F(x, y, z)=xyz+x'yz+xy'z+xyz'$$

का सरलीकरण कीजिए और संगत GATE परिपथ को रेखांकित कीजिए।

Simplify the Boolean function

$$F(x, y, z)=xyz+x'yz+xy'z+xyz'$$

and draw the corresponding GATE network. 15

(c) द्रव्यमान M, त्रिज्या R और लम्बाई L के एक एकसमान ठोस बेलन का, बेलन के केन्द्र से होकर जाने वाले अक्षों के एक समुच्चय के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण की गणना कीजिए, जहाँ z-अक्ष, बेलन का अक्ष है और ρ, बेलन के किसी भी बिन्दु पर अचर घनत्व है। बेलन के एक दिए गए द्रव्यमान के लिए $\frac{L}{R}$, जिसके लिए x- या y-अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण न्यूनतम होगा, भी ज्ञात कीजिए।

Calculate the moment of inertia of a uniform solid cylinder of mass M, radius R and length L with respect to a set of axes passing through the centre of the cylinder, where z-axis is the axis of the cylinder and ρ is the constant density at any point of the cylinder. Also find $\frac{L}{R}$ for which the moment of inertia about x- or y-axis will be minimum for a given mass of the cylinder. 15

7. (a) $z(p^2 - q^2) = x - y;\ p \equiv \dfrac{\partial z}{\partial x},\ q \equiv \dfrac{\partial z}{\partial y}$ का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।

Find the complete integral of $z(p^2 - q^2) = x - y;\ p \equiv \dfrac{\partial z}{\partial x},\ q \equiv \dfrac{\partial z}{\partial y}$. 15

(b) घात 2 या 2 से कम का वह अद्वितीय बहुपद, जो आँकड़ों

x	:	0	1	3
$f(x)$	:	1	3	55

पर ठीक बैठता है, ज्ञात कीजिए। रुंडन त्रुटि पर परिबंध भी प्राप्त कीजिए।

Find the unique polynomial of degree 2 or less which fits the following data :

x	:	0	1	3
$f(x)$	:	1	3	55

Also obtain the bound on the truncation error. 15

(c) दर्शाइए कि अचर विस्कासिता के एक असंपीड्य अपरिवर्ती प्रवाह के लिए वेग घटक

$$u(y) = \left(\frac{U}{h}\right)y - \frac{hy}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

$v = 0 = w,\ p = p(x)$ के साथ, पिंड बल की अनुपस्थिति में गति के समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं। यह दिया गया है कि $U,\ h$ और $\dfrac{dp}{dx}$ अचर हैं।

Show that for an incompressible steady flow with constant viscosity, the velocity components

$$u(y) = \left(\frac{U}{h}\right)y - \frac{hy}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

$v = 0 = w$, with $p = p(x)$, satisfy the equation of motion in the absence of body force. Given that $U,\ h$ and $\dfrac{dp}{dx}$ are constants. 20

8. *(a)* आंशिक अवकल समीकरण

$$p^2 + q^2 = 2;\ p \equiv \frac{\partial z}{\partial x},\ q \equiv \frac{\partial z}{\partial y}$$

के अभिलक्षण (कैरेक्टरिस्टिक्स) ज्ञात कीजिए और $x = 0,\ z = y$ से होकर जाने वाला समाकल पृष्ठ (सरफेस) प्राप्त कीजिए।

Find the characteristics of the partial differential equation

$$p^2 + q^2 = 2;\ p \equiv \frac{\partial z}{\partial x},\ q \equiv \frac{\partial z}{\partial y}$$

and determine the integral surface which passes through $x = 0,\ z = y$. 15

(b) क्षेत्रकलन-सूत्र

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + ph^2(f_0' - f_1')$$

जहाँ $x_0 + h = x_1,\ f_0 = f(x_0),\ f_1 = f(x_1)$ हैं और प्राइम ($'$), x के सापेक्ष अवकलज को निरूपित करता है, के लिए अचर p और त्रुटि-पद ज्ञात कीजिए। अतः समाकलन

$$\int_a^b f(x)\,dx,\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

का मान ज्ञात करने के लिए संयुक्त नियम का निगमन कीजिए।

Find the constant p and error term for the quadrature formula

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + ph^2(f_0' - f_1')$$

where $x_0 + h = x_1,\ f_0 = f(x_0),\ f_1 = f(x_1)$ and prime ($'$) represents derivative with respect to x. Hence deduce the composite rule for integrating

$$\int_a^b f(x)\,dx,\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

15

(c) (i) विभव

$$V(r) = -\frac{k\cos\theta}{r^2},\ k \text{ अचर है}$$

के एक बल क्षेत्र में द्रव्यमान m का एक कण गतिमान है। गोलीय ध्रुवीय निर्देशांकों (r, θ, ϕ) में हैमिल्टोनियन और हैमिल्टन का समीकरण ज्ञात कीजिए।

A particle of mass m moves in a force field of potential

$$V(r) = -\frac{k\cos\theta}{r^2},\ k \text{ is constant}$$

Find the Hamiltonian and the Hamilton's equations in spherical polar coordinates (r, θ, ϕ). 10

(ii) लग्रांजी $L = m\dot{x}\dot{y} - m\omega_0^2 xy$, जहाँ m और ω_0 अचर हैं, का विचार कीजिए। हैमिल्टोनियन और गति का हैमिल्टन समीकरण ज्ञात कीजिए। तंत्र (सिस्टम) की पहचान बताइए।

Consider the Lagrangian

$$L = m\dot{x}\dot{y} - m\omega_0^2 xy$$

where m and ω_0 are constants. Find the Hamiltonian and Hamilton's equations of motion. Identify the system. 10

★ ★ ★