गणित (प्रश्न-पत्र–II)

निर्धारित समय : तीन घण्टे

अधिकतम अंक : 250

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

(कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़िए)

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेजी** दोनों में छपे हुए हैं।

परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू० सी० ए०) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।

MATHEMATICS (PAPER–II)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 250

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

(Please read each of the following instructions carefully before attempting questions)

There are EIGHT questions divided in two Sections and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड—A / SECTION—A

1. *(a)* मान लीजिए कोटि 10 का एक समूह G है तथा कोटि 6 का एक समूह G' है। जाँच कीजिए कि क्या G से G' पर एक आच्छादक समाकारिता का अस्तित्व है।

Let G be a group of order 10 and G' be a group of order 6. Examine whether there exists a homomorphism of G onto G'. 10

(b) गुणजावली $4Z + 6Z$ को पूर्णांकीय प्रांत Z में एक मुख्य गुणजावली के रूप में व्यक्त कीजिए।

Express the ideal $4Z + 6Z$ as a principal ideal in the integral domain Z. 10

(c) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$, $x > 0$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, \quad x > 0$$

10

(d) एक फलन $f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ के इसके प्रांत में विश्लेषिक होने के लिए पर्याप्त प्रतिबंध लिखिए। तब दर्शाइए कि $f(z) = \log z$ अपने प्रांत में विश्लेषिक है तथा $\frac{df}{dz}$ ज्ञात कीजिए।

State the sufficient conditions for a function $f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ to be analytic in its domain. Hence, show that $f(z) = \log z$ is analytic in its domain and find $\frac{df}{dz}$. 10

(e) एक व्यक्ति को अपने उद्यान के लिए रसायन A, B तथा C की क्रमशः 24, 24 तथा 20 इकाई की आवश्यकता है। उत्पाद P के प्रत्येक मर्तबान में रसायन A, B तथा C की क्रमशः 2, 4 तथा 1 इकाई हैं तथा उत्पाद Q के प्रत्येक मर्तबान में रसायन A, B तथा C की क्रमशः 2, 1 तथा 5 इकाई हैं। यदि P के एक मर्तबान का मूल्य ₹ 30 है तथा Q के एक मर्तबान का मूल्य ₹ 50 है, तब न्यूनतम खर्च तथा आवश्यकताओं की पूर्ति के लिए प्रत्येक उत्पाद के कितने मर्तबान खरीदे जाएँ?

A person requires 24, 24 and 20 units of chemicals A, B and C respectively for his garden. Product P contains 2, 4 and 1 units of chemicals A, B and C respectively per jar and product Q contains 2, 1 and 5 units of chemicals A, B and C respectively per jar. If a jar of P costs ₹ 30 and a jar of Q costs ₹ 50, then how many jars of each should be purchased in order to minimize the cost and meet the requirements? 10

2. *(a)* सिद्ध कीजिए कि $2p$ कोटि के एक अक्रमविनिमेय समूह, जहाँ p एक विषम अभाज्य संख्या है, में p कोटि का एक उपसमूह होना आवश्यक है।

Prove that a non-commutative group of order $2p$, where p is an odd prime, must have a subgroup of order p. 15

(b) लग्रांज गुणक विधि के उपयोग से बिंदु $P(2, 6, 3)$ की गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ से न्यूनतम तथा अधिकतम दूरियाँ ज्ञात कीजिए।

Using the method of Lagrange's multipliers, find the minimum and maximum distances of the point $P(2, 6, 3)$ from the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. 15

(c) कन्टूर समाकलन का उपयोग कर $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta$ using contour integration. 20

3. (a) सिद्ध कीजिए कि $x^2 + 1$, $Z_3[x]$ में एक अखंडनीय बहुपद है। यह भी दर्शाइए कि विभाग वलय $\frac{Z_3[x]}{\langle x^2 + 1 \rangle}$, 9 अवयवों का एक क्षेत्र है।

Prove that $x^2 + 1$ is an irreducible polynomial in $Z_3[x]$. Further show that the quotient ring $\frac{Z_3[x]}{\langle x^2 + 1 \rangle}$ is a field of 9 elements. 15

(b) सिद्ध कीजिए कि $u(x, y) = e^x (x\cos y - y\sin y)$ प्रसंवादी है। इसका संयुग्मी प्रसंवादी फलन $v(x, y)$ ज्ञात कीजिए तथा संगत विश्लेषिक फलन $f(z)$ को z के पदों में व्यक्त कीजिए।

Prove that $u(x, y) = e^x (x\cos y - y\sin y)$ is harmonic. Find its conjugate harmonic function $v(x, y)$ and express the corresponding analytic function $f(z)$ in terms of z. 15

(c) बड़ा M (बिग M) विधि से निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए :

न्यूनतमीकरण कीजिए $Z = 2x_1 + 3x_2$

बशर्ते कि

$$x_1 + x_2 \geq 9$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 15$$
$$2x_1 - 3x_2 \leq 9$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

क्या इष्टतम हल अद्वितीय है? अपने उत्तर का तर्क प्रस्तुत कीजिए।

Solve the following linear programming problem by Big M method :

Minimize $Z = 2x_1 + 3x_2$

subject to

$$x_1 + x_2 \geq 9$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 15$$
$$2x_1 - 3x_2 \leq 9$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Is the optimal solution unique? Justify your answer. 20

4\. *(a)* सिद्ध कीजिए कि $[a, b]$ पर परिभाषित एक वास्तविक मान परिबद्ध फलन f का दोलन, समुच्चय $\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in [a, b]\}$ का उच्चक है।

Prove that the oscillation of a real-valued bounded function f defined on $[a, b]$ is the supremum of the set $\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in [a, b]\}$. 15

(b) फलन $f(z) = \dfrac{e^z}{z - \sin z}$ के विचित्र बिंदु $z = 0$ का वर्गीकरण कीजिए तथा इसके लौराँ श्रेणी प्रसार का मुख्य भाग ज्ञात कीजिए।

Classify the singular point $z = 0$ of the function $f(z) = \dfrac{e^z}{z - \sin z}$ and obtain the principal part of its Laurent series expansion. 15

(c) एक विभाग के अध्यक्ष के आधीन 5 कर्मचारी हैं तथा उसके पास 5 कार्य हैं। प्रत्येक कर्मचारी के लिए प्रत्येक कार्य को करने का समय (घण्टों में) नीचे आव्यूह में दिया गया है :

कर्मचारी \ कार्य	A	B	C	D	E
I	4	9	4	12	4
II	15	11	20	5	8
III	17	7	15	12	18
IV	9	13	11	9	14
V	6	11	12	9	14

कुल समय के न्यूनतमीकरण के लिए, प्रत्येक कर्मचारी को एक कार्य किस प्रकार दिया जाए? यदि कर्मचारी *IV* को कार्य *C* नहीं दिया जा सकता है, तो सभी कार्यों को करने में लगने वाला कुल न्यूनतम समय भी ज्ञात कीजिए।

A department head has 5 subordinates and 5 jobs to be performed. The time (in hours) that each subordinate will take to perform each job is given in the matrix below :

Subordinates \ Jobs	A	B	C	D	E
I	4	9	4	12	4
II	15	11	20	5	8
III	17	7	15	12	18
IV	9	13	11	9	14
V	6	11	12	9	14

How should the jobs be assigned, one to each subordinate, so as to minimize the total time? Also, obtain the total minimum time to perform all the jobs if the subordinate *IV* cannot be assigned job *C*. 20

खण्ड—B / SECTION—B

5. *(a)* $z = f(x^2 - y) + g(x^2 + y)$ से स्वैच्छिक फलनों f तथा g का विलोपन कर आंशिक अवकल समीकरण बनाइए।

By eliminating the arbitrary functions f and g from $z = f(x^2 - y) + g(x^2 + y)$, form partial differential equation. 10

(b) दिया है $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - x}{y^2 + x}$ तथा प्रारंभिक प्रतिबंध $x = 0$ पर $y = 1$ है। ऑयलर की विधि से पग लंबाई (स्टेप लेंथ) $h = 0 \cdot 1$ लेते हुए $x = 0 \cdot 4$ के लिए y का मान, दशमलव के 4 स्थानों तक सही, ज्ञात कीजिए।

Given $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - x}{y^2 + x}$ with initial condition $y = 1$ at $x = 0$. Find the value of y for $x = 0 \cdot 4$ by Euler's method, correct to 4 decimal places, taking step length $h = 0 \cdot 1$. 10

(c) द्वि-आधारी अंकगणित का उपयोग कर निम्नलिखित संख्याओं का मूल्यांकन उनकी दी गई पद्धति में कीजिए :

(i) $(634 \cdot 235)_8 - (132 \cdot 223)_8$

(ii) $(7AB \cdot 432)_{16} - (5CA \cdot D61)_{16}$

Evaluate, using the binary arithmetic, the following numbers in their given system :

(i) $(634 \cdot 235)_8 - (132 \cdot 223)_8$

(ii) $(7AB \cdot 432)_{16} - (5CA \cdot D61)_{16}$ 10

(d) m द्रव्यमान का एक ग्रह M द्रव्यमान के सूर्य की परिक्रमा कर रहा है। ग्रह की गतिज ऊर्जा T तथा स्थितिज ऊर्जा V, $T = \dfrac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$ तथा $V = G\,Mm\left(\dfrac{1}{2a} - \dfrac{1}{r}\right)$ द्वारा दी गई हैं, जहाँ t समय पर ग्रह के ध्रुवीय निर्देशांक (r, θ) हैं, गुरुत्वीय स्थिरांक G है तथा दीर्घवृत्त (ग्रह का पथ) का दीर्घ अक्ष $2a$ है। ग्रह की गति के लिए हैमिल्टनी तथा हैमिल्टन समीकरणों को ज्ञात कीजिए।

A planet of mass m is revolving around the sun of mass M. The kinetic energy T and the potential energy V of the planet are given by $T = \dfrac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$ and $V = G\,Mm\left(\dfrac{1}{2a} - \dfrac{1}{r}\right)$, where (r, θ) are the polar coordinates of the planet at time t, G is the gravitational constant and $2a$ is the major axis of the ellipse (the path of the planet). Find the Hamiltonian and the Hamilton equations of the planet's motion. 10

(e) एक तरल प्रवाह में, $2m$ सामर्थ्य का एक स्रोत $z = 2$ पर स्थित है तथा m सामर्थ्य के दो अभिगम (सिंक) $z = 2 + i$ और $z = 2 - i$ पर स्थित हैं। प्रवाह-रेखाएँ ज्ञात कीजिए।

In a fluid motion, there is a source of strength $2m$ placed at $z = 2$ and two sinks of strength m are placed at $z = 2 + i$ and $z = 2 - i$. Find the streamlines. 10

6. *(a)* दो रेखाओं $z = x = 0$ तथा $z - 1 = x - y = 0$ से होकर जाने वाला और आंशिक अवकल समीकरण $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ को संतुष्ट करने वाला पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

Find the surface passing through the two lines $z = x = 0$ and $z - 1 = x - y = 0$, and satisfying the partial differential equation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$ 15

(b) गाउस-सीडेल पुनरावर्ती विधि से रैखिक समीकरण निकाय

$$\begin{aligned} 7x_1 - x_2 + 2x_3 &= 11 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 &= 9 \\ x_1 - 2x_2 + 9x_3 &= 7 \end{aligned}$$

का 4 सार्थक अंकों तक सही हल ज्ञात कीजिए। आरंभिक अनुमानित हल $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ लीजिए।

Solve the system of linear equations

$$\begin{aligned} 7x_1 - x_2 + 2x_3 &= 11 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 &= 9 \\ x_1 - 2x_2 + 9x_3 &= 7 \end{aligned}$$

correct up to 4 significant figures by the Gauss-Seidel iterative method. Take initially guessed solution as $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. 15

(c) स्वतंत्रता की कोटि 2 के एक यांत्रिक तंत्र का लग्रांजियन

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}m(w_1^2 x^2 + w_2^2 y^2) + kxy$$

है, जहाँ m, w_1, w_2, k अचर हैं। वह प्राचल θ ज्ञात कीजिए, जिसके लिए रूपांतरण

$$x = q_1 \cos\theta - q_2 \sin\theta, \quad y = q_1 \sin\theta + q_2 \cos\theta$$

के अंतर्गत q_1, q_2 के पदों में लग्रांजियन में गुणन पद $q_1 q_2$ नहीं होगा। प्राचल θ से स्वतंत्र, q_1 तथा q_2 के सापेक्ष लग्रांज समीकरणों को ज्ञात कीजिए।

A mechanical system with 2 degrees of freedom has the Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}m(w_1^2 x^2 + w_2^2 y^2) + kxy$$

where m, w_1, w_2, k are constants. Find the parameter θ so that under the transformation

$$x = q_1 \cos\theta - q_2 \sin\theta, \quad y = q_1 \sin\theta + q_2 \cos\theta$$

the Lagrangian in terms of q_1, q_2 will not contain the product term $q_1 q_2$. Find the Lagrange's equations w.r.t. q_1 and q_2 independent of parameter θ. 20

7\. *(a)* *(i)* निम्न बूलीय फलन का योगात्मक प्रसामान्य स्वरूप (CNF) ज्ञात कीजिए :

$$f(x, y, z, t) = x \cdot y \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot (t + \bar{z})$$

(ii) बूलीय फलन

$$f(x, y, z) = x + \overline{(\bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot z)} + z$$

को वियोजनीय (डिसुजंक्टिव) प्रसामान्य स्वरूप (DNF) में व्यक्त कीजिए तथा इस फलन के लिए सत्यमान सारणी बनाइए।

(i) Find the conjunctive normal form (CNF) of the following Boolean function :

$$f(x, y, z, t) = x \cdot y \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot (t + \bar{z})$$

(ii) Express the Boolean function

$$f(x, y, z) = x + \overline{(\bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot z)} + z$$

in disjunctive normal form (DNF) and construct the truth table for the function. 15

(b) एक आदर्श रुक्ष गेंद एक खोखले बेलनाकार रोलर में विराम की स्थिति में है। रोलर को एक समतल पथ के अनुदिश एकसमान वेग V से खींचा जाता है। मान लीजिए कि a तथा b क्रमशः गेंद तथा रोलर की त्रिज्याएँ हैं। यदि $V^2 > \frac{27}{7} g(b-a)$ है, तब दर्शाइए कि गेंद रोलर के अन्दर पूर्ण रूप से घूम जाएगी।

A perfectly rough ball is at rest within a hollow cylindrical roller. The roller is drawn along a level path with uniform velocity V. Let a and b be the radii of the ball and the roller respectively. If $V^2 > \frac{27}{7} g(b-a)$, then show that the ball will roll completely round the inside of the roller. 15

(c) आंशिक अवकल समीकरण

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \;\; t > 0$$

का शर्तों

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 1, \quad 0 < x < L$$

से प्रतिबंधित हल ज्ञात कीजिए।

Solve the partial differential equation

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \;\; t > 0$$

subject to the conditions

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 1, \quad 0 < x < L$$

20

8. *(a)* आंशिक अवकल समीकरण

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{z}{x} = 0$$

को विहित रूप में समानीत कीजिए।

Reduce the partial differential equation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{z}{x} = 0$$

to canonical form. 15

(b) मिथ्या-स्थिति (रेगुला-फाल्सि) विधि से अंतराल [0, 3] में, समीकरण $\log_{10}(2x+1) - x^2 + 3 = 0$ के एक मूल का, दशमलव के 6 स्थानों तक सही, अभिकलन कीजिए।

Compute a root of the equation $\log_{10}(2x+1) - x^2 + 3 = 0$, in the interval [0, 3], by Regula-Falsi method, correct to 6 decimal places. 15

(c) ज्ञात कीजिए कि किन शर्तों के अंतर्गत वेग क्षेत्र (velocity field) $u = c(x^2 - y^2)$, $v = -2cxy$, $w = 0$ नेवियर-स्टोक्स संवेग समीकरणों का एक हल है। यह मानते हुए कि शर्तें मान्य हैं, परिणामी दाब बंटन ज्ञात कीजिए, जब z ऊपर है तथा बाह्य पिंड बल $B_x = 0 = B_y$, $B_z = -g$ हैं।

Determine under what conditions the velocity field $u = c(x^2 - y^2)$, $v = -2cxy$, $w = 0$ is a solution to the Navier-Stokes momentum equations. Assuming that the conditions are met, determine the resulting pressure distribution, when z is up and the external body forces are $B_x = 0 = B_y$, $B_z = -g$. 20

★★★