

Code No. **35**

Total No. of Questions : 40]

[Total No. of Printed Pages : 16

June/July, 2009

MATHEMATICS

(Kannada and English Versions)

Time : 3 Hours 15 Minutes]

[Max. Marks : 100

(Kannada Version)

- ಸೂಚನೆ : i) ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ **A, B, C, D** ಮತ್ತು **E** ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ವಿಭಾಗಗಳಿವೆ. ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ.
- ii) ವಿಭಾಗ - **A** ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **B** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **C** ಗೆ 40 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **D** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು ಮತ್ತು ವಿಭಾಗ - **E** ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ವಿಭಾಗ - A

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

10 × 1 = 10

1. $3x \equiv 2 \pmod{6}$ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಗೆ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ. ಏಕೆ ?
2. \vec{a} ಯ ದೈರೆಕ್ಷನ್ ಕೊಸೈನ್‌ಗಳು (Direction cosines) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ ಮತ್ತು n ಗಳಾದರೆ n ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ I ಯಲ್ಲಿ * ಕ್ರಿಯೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ $a * b = a^b$, $\forall a, b \in I$ ಆಗಿದೆ. ಈ ಕ್ರಿಯೆಯು ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಯೇ ಅಥವಾ I ಮೇಲಿಲ್ಲವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

[Turn over

Code No. 35

2

4. A, B ಗಳು ಒಂದೇ ಪರಿಮಾಣ (Order) ಇರುವ ಎರಡು ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಗಳು. $|A| = 4, |B| = 5$ ಆದರೆ, $|AB|$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಣ ದೂರ d ಆಗಿದ್ದು, r_1, r_2 ಗಳು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ವೃತ್ತಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಬಾಹ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶವಾಗಬೇಕಾದ (External touch) ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು (Condition) ಬರೆಯಿರಿ.
6. $4x^2 + 9y^2 = 36$ ರ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ನಾಭಿ ದೂರಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. $\sin^{-1}(\sin 130^\circ)$ ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n = 1$ ಆಗುವಂತೆ n ನ ಕನಿಷ್ಠ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
9. ಉತ್ಪನ್ನ $f(x) = |x|$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $Lf'(0)$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin^3 x + \cos x) dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಿಭಾಗ - B

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : 10 × 2 = 20

11. $ca \equiv cb \pmod{m}$ ಆಗಿದ್ದು c, m ಗಳು ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ $a \equiv b \pmod{m}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12. $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ಆದಾಗ, AA' ಯು ಸಮಮಿತಿ (Symmetric) ಮಾತೃಕೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

13. ಅರೆಸಂಕುಲವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ. 'ಸಂಕುಲನ ಮಾಡ್ಯುಲೋ 5' ($+_5$) ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ $\{ 1, 2, 3, 4 \}$ ಗಣವು ಅರೆಸಂಕುಲವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.
14. \mathcal{Q}^+ (ಧನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ) ಗಣದಲ್ಲಿ $*$ ಎಂಬ ಕ್ರಿಯೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ $a * b = \frac{ab}{3}$, $\forall a, b \in \mathcal{Q}^+$ ಆಗಿದೆ. ಅನನ್ಯತಾಂಶ ಮತ್ತು \mathcal{Q}^+ ನಲ್ಲಿ a^{-1} ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
15. $\lambda \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$, $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ಮತ್ತು $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ಗಳು ಸಮತಲ ಸದಿಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ (Coplanar vectors), λ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
16. $(0, 0), (3, 0)$ ಮತ್ತು $(0, 4)$ ಗಳು ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಪರಿವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
17. ಬಿಡಿಸಿ : $\tan^{-1} x = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} - \cot^{-1} \frac{1}{3}$.
18. $5e^{i \tan^{-1} \frac{4}{3}}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಾಸ್ತವ (Real) ಮತ್ತು ಊಹ್ಯ (Imaginary) ಭಾಗಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 3, 4 ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
19. $y = \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} \right) + \sec^{-1} \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right)$ ಆದರೆ, $\frac{dy}{dx} = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
20. $x^m y^n = a^{m+n}$ ಎಂಬ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಉಪಸ್ಪರ್ಶಕವು ಬಿಂದುವಿನ ಭುಜವಾಗಿ (Abscissa) ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
21. $\int [\sin (\log x) + \cos (\log x)] dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
22. y -ಅಕ್ಷವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ (Origin) ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳ ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು (Differential equation) ಪಡೆಯಿರಿ.

ವಿಭಾಗ - C

I. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : 3 × 5 = 15

23. a) a, b ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. (GCD) ವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ. 275 ಮತ್ತು 726 ರ ಮ.ಸಾ.ಅ. ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) 252 ನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನಾಗಿ ಬರೆದು ಅದರ ಧನ ಭಾಜಕಗಳೆಷ್ಟು ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

24. ಕೋಶ ಪದ್ಧತಿಯ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ : $2x - y = 10$

$$x - 2y = 2$$

ಇಲ್ಲಿರುವ ಸಹಾಂಕಗಳ ಕೋಶವು ಕ್ಯಾಲಿ-ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ತೃಪ್ತಿಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ (Satisfies) ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. 5

25. $\forall a, b \in H, ab^{-1} \in H$ ಆದಾಗ, G ಸಂಕುಲದ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಉಪಗಣವಾದ H ಗಣವು G ಯ ಉಪಸಂಕುಲವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ H ಮತ್ತು K ಗಳು G ಯ ಉಪಸಂಕುಲಗಳಾದರೆ $H \cap K$ ಕೂಡಾ G ಯ ಉಪಸಂಕುಲವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 5

26. a) $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಾಗ \vec{a} ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು \vec{a} , \vec{b} ಗಳ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ (coplanar with \vec{a} and \vec{b}) ಘಟಕ ಸದಿಶ (Unit vector) ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ಆದರೆ,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a} \text{ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.} \quad \text{2}$$

II. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ : 2 × 5 = 10

27. a) $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ ಮತ್ತು
 $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ
 ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ. 3

b) ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರವು (1, 2) ಆಗಿದೆ. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು
 $x^2 + y^2 - 2x + 3y = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಈ ಕೇಂದ್ರವು ವೃತ್ತಗಳ ಒಳಗೆ ಅಥವಾ
 ಹೊರಗೆ ಇದೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. 2

28. a) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$ ಯ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಅದರ ಸಹಾಯಕ
 (Auxiliary) ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) ಪರವಲಯ $x = 2t^2$, $y = 4t$ ಯ ನಿಯತದ (Directrix) ಸಮೀಕರಣವನ್ನು
 ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

29. a) $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y + \sin^{-1} z = \frac{\pi}{2}$ ಆದಾಗ
 $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $\tan 2\theta \tan \theta = 1$ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

III. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ : 3 × 5 = 15

30. a) ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ $\sin 2x$ ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ (Differentiate). 3

b) x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ : $(\sin x)^{\log x}$ 2

31. a) $\cos^{-1} (4x^3 - 3x)$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $\cos^{-1} (1 - 2x^2)$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ
 ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ. 3

b) ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಾದ $y = 6 + x - x^2$ ಮತ್ತು $y(x - 1) = x + 2$ ಗಳು (2, 4)
 ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 2

[Turn over

Code No. 35

6

32. a) $y = \sin (m \cos^{-1} x)$ ಆದರೆ,

$$(1 - x^2) y_2 - xy_1 + m^2 y = 0 \text{ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.} \quad 3$$

b) $\int \frac{1}{x (x^5 + 1)} dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

33. a) x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅನುಕಲಿಸಿ (Integrate) :

$$\frac{\sin x + 18 \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x} \quad 3$$

b) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

34. ಅನುಕಲನ (Integration) ವಿಧಾನದಿಂದ $x^2 + y^2 = 6$ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 5

ವಿಭಾಗ - D

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : 2 × 10 = 20

35. a) $y = mx + c$ ಸರಳರೇಖೆಯು $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ಅತಿಪರವಲಯಕ್ಕೆ

ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಲು ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ (Derive). ಇದಲ್ಲದೆ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವನ್ನು

ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $x - y + 5 = 0$ ರೇಖೆಗೆ

ಸಮಾಂತರವಾಗುವಂತೆ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{12} = 1$ ಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು

ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b)
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 + bc \\ 1 & b & b^2 + ca \\ 1 & c & c^2 + ab \end{vmatrix} = 2(a-b)(b-c)(c-a) \text{ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.} \quad 4$$

36. a) ಡಿ ಮೋಯ್ಬರಾನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ. ಘಾತವು ಧನ, ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿರುವಾಗ ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ. ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ
 $Z = \cos \theta + i \sin \theta$ ಆದಾಗ $\frac{Z^{10} - 1}{Z^{10} + 1} = i \tan 5\theta$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 6
- b) $\cos 2\theta = \sqrt{2} (\cos \theta - \sin \theta)$ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4
37. a) ಒಂದು ಗೋಳದ ಘನಫಲವು ಹೆಚ್ಚುವ ದರ 4π c.c./sec. ಆಗಿದೆ. ಘನಫಲವು 288π ಆದಾಗ ತ್ರಿಜ್ಯ, ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಹೆಚ್ಚುವ ದರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದಲ್ಲದೆ
 (i) 5 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ಘನಫಲದಲ್ಲಿ ಆಗುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಮತ್ತು (ii) ಘನಫಲ 288π ಆದಾಗ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಘನಫಲವು ಹೆಚ್ಚುವ ದರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6
- b) $(1, 5)$ ಮತ್ತು $(1, 1)$ ಬಿಂದುಗಳು ನಾಭಿ ಲಂಬಗಳಾಗಿರುವ ಪರವಲಯದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4
- 38 a) $\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 6
- b) $xy(1+x^2) \frac{dy}{dx} - y^2 = 1$ ರ ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ (Particular) ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ : $x = 1, y = 0$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. 4

ವಿಭಾಗ - E

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

1 × 10 = 10

39. a) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}|$ ಆದರೆ, $\vec{a} + \vec{b}$ ಮತ್ತು \vec{c} ಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

[Turn over

Code No. 35

8

b) ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅಳತೆಯ ವಿಕರ್ಣವಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

c) $\left(16 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{4}}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

40. a) $2^{150} \times 3^{12} \times 135 \equiv a \pmod{7}$ ಆದರೆ, a ಯನ್ನು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುವಾಗ ಸಿಗುವ ಕನಿಷ್ಠ ಧನ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

b) $2(x^2 + y^2) - 12x - 4y + 10 = 0$ ಮತ್ತು

$x^2 + y^2 + 5x - 13y + 16 = 0$ ವೃತ್ತಗಳ 'ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾ'ದ ಉದ್ದವನ್ನು

ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

c) $\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x} + \sqrt{x}} dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

(English Version)

- Instructions :* i) The question paper has *five Parts – A, B, C, D and E.*
Answer all the Parts.
- ii) **Part – A** carries 10 marks, **Part – B** carries 20 marks,
Part – C carries 40 marks, **Part – D** carries 20 marks and
Part – E carries 10 marks.

PART – A

Answer *all* the *ten* questions :

10 × 1 = 10

1. $3x \equiv 2 \pmod{6}$ has no solution. Why ?
2. If direction cosines of \vec{a} are $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ and n , find n .
3. On I (the set of all integers), and operation $*$ is defined by $a * b = a^b$,
 $\forall a, b \in I$. Examine whether $*$ is binary or not on I .
4. A and B are square matrices of the same order and $|A| = 4$, $|B| = 5$.
Find $|AB|$.
5. Given two circles with radii r_1 , r_2 and having d as the distance
between their centres, write the condition for them to touch each other
externally.
6. Find the sum of the focal distances of any point on $4x^2 + 9y^2 = 36$.
7. Evaluate $\sin^{-1}(\sin 130^\circ)$.

[Turn over

8. Find the least positive integer n for which $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n = 1$.

9. Given the function $f(x) = |x|$, find $Lf'(0)$.

10. Evaluate $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin^3 x + \cos x) dx$.

PART - B

Answer any *ten* questions :

10 × 2 = 20

11. If $ca \equiv cb \pmod{m}$ and c, m are relatively prime then prove that

$$a \equiv b \pmod{m}$$

12. For the matrix $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, verify that AA' is symmetric.

13. Define a semigroup. Examine whether $\{1, 2, 3, 4\}$ is a semigroup under 'addition modulo 5' ($+_5$).

14. On \mathcal{Q}^+ (set of all +ve rationals), an operation $*$ is defined by $a * b = \frac{ab}{3}$, $\forall a, b \in \mathcal{Q}^+$. Find the identity element and a^{-1} in \mathcal{Q}^+ .

15. If $\lambda \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$, $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ and $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ are coplanar, find λ .

16. Find the equation of the circumcircle of the triangle formed by $(0, 0)$, $(3, 0)$ & $(0, 4)$.

17. Solve $\tan^{-1} x = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} - \cot^{-1} \frac{1}{3}$.

18. Show that the real and imaginary parts of $5e^{i \tan^{-1} \frac{4}{3}}$ are 3, 4 respectively.

19. If $y = \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} \right) + \sec^{-1} \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right)$, prove that $\frac{dy}{dx} = 0$.

20. At any point on the curve $x^m y^n = a^{m+n}$, show that the subtangent varies as the abscissa of the point.

21. Evaluate $\int [\sin (\log x) + \cos (\log x)] dx$.

22. Form the differential equation of the family of circles touching y -axis at origin.

PART - C

I. Answer any *three* questions :

3 × 5 = 15

23. a) Define GCD of two integers a and b . Find the GCD of 275 and 726. 3

b) Find the number of positive divisors of 252 by writing it as the product of primes (prime power factorisation). 2

[Turn over

Code No. 35

12

24. Solve by matrix method : $2x - y = 10$

$$x - 2y = 2$$

Also, verify that the coefficient matrix of this system satisfies Cayley-Hamilton theorem. 5

25. Prove that a non-empty subset H of a group G , is a subgroup of G , if $\forall a, b \in H, ab^{-1} \in H$. Hence prove that, if H and K are subgroups of a group G then $H \cap K$ also, is a subgroup of G . 5

26. a) Given $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, find a unit vector perpendicular to \vec{a} and coplanar with \vec{a} and \vec{b} . 3

b) If $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, prove that $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$. 2

II. Answer any *two* questions : 2 × 5 = 10

27. a) Derive the condition for the two circles

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \text{ and}$$

$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ to cut each other orthogonally. 3

b) $(1, 2)$ is the radical centre of three circles. One of the circles is $x^2 + y^2 - 2x + 3y = 0$. Examine whether the radical centre lies inside or outside all the circles. 2

28. a) Given the equation of the conic $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$, find its centre and the area of its auxiliary circle. 3
- b) Obtain the equation of the directrix of the parabola $x = 2t^2$, $y = 4t$. 2
29. a) If $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y + \sin^{-1} z = \frac{\pi}{2}$, prove that $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. 3
- b) Find the general solution of $\tan 2\theta \tan \theta = 1$. 2

III. Answer any *three* of the following questions : 3 × 5 = 15

30. a) Differentiate $\sin 2x$ w.r.t. x from first principle. 3
- b) Differentiate $(\sin x)^{\log x}$ w.r.t. x . 2
31. a) Differentiate $\cos^{-1} (4x^3 - 3x)$ w.r.t. $\cos^{-1} (1 - 2x^2)$. 3
- b) Show that the curves $y = 6 + x - x^2$ and $y (x - 1) = x + 2$ touch each other at $(2, 4)$. 2
32. a) If $y = \sin (m \cos^{-1} x)$, prove that $(1 - x^2) y_2 - xy_1 + m^2 y = 0$. 3
- b) Evaluate $\int \frac{1}{x(x^5 + 1)} dx$. 2

[Turn over

Code No. 35

14

33. a) Integrate $\frac{\sin x + 18 \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x}$ w.r.t. x . 3

b) Evaluate $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$. 2

34. Find the area of $x^2 + y^2 = 6$ by integration. 5

PART - D

Answer any *two* of the following questions : 2 × 10 = 20

35. a) Derive a condition for $y = mx + c$ to be a tangent to the hyperbola

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Also, find the point of contact. Using the condition derived, find the equations of tangents to $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{12} = 1$, which are parallel to $x - y + 5 = 0$. 6

b) Prove that

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 + bc \\ 1 & b & b^2 + ca \\ 1 & c & c^2 + ab \end{vmatrix} = 2(a - b)(b - c)(c - a).$$
 4

36. a) State De Moivre's theorem. Prove it for positive and negative integral indices. Using it prove that $\frac{Z^{10} - 1}{Z^{10} + 1} = i \tan 5\theta$ if

$Z = \cos \theta + i \sin \theta$. 6

b) Find the general solution of $\cos 2\theta = \sqrt{2} (\cos \theta - \sin \theta)$. 4

37. a) The volume of a sphere increases at the rate of 4π c.c./sec. Find the rates of increase of its radius and surface area when its volume is 288π c.c. Also find (i) the change in volume in 5 secs, (ii) rate of increase of volume w.r.t. radius when the volume is 288π c.c. 6
- b) Obtain the equations of parabolas having $(1, 5)$ and $(1, 1)$ as ends of the latus rectum. 4
38. a) Prove that $\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}$. 6
- b) Find the particular solution of $xy(1+x^2) \frac{dy}{dx} - y^2 = 1$, given that, when $x = 1, y = 0$. 4

PART - E

Answer any *one* of the following questions :

$1 \times 10 = 10$

39. a) If $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}|$, find the angle between $\vec{a} + \vec{b}$ and \vec{c} . 4
- b) Among all right-angled triangles of a given hypotenuse, show that the triangle which is isosceles has maximum area. 4
- c) Find the fourth roots of $16 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$. 2

[Turn over

Code No. 35

16

40. a) If $2^{150} \times 3^{12} \times 135 \equiv a \pmod{7}$, find the least positive remainder when a is divided by 7. 4

b) Given the circles $2(x^2 + y^2) - 12x - 4y + 10 = 0$ and

$x^2 + y^2 + 5x - 13y + 16 = 0$, find the length of their common chord. 4

c) Evaluate $\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x} + \sqrt{x}} dx$. 2

www.careerindia.com