No. of Questions - 10 + 12 + 7 = 29] **[No. of Printed Pages - 8**

2020
MATHEMATICS

(Optional)

Full Marks - 100

Pass Marks - 33

Time - 3 Hours

All questions are compulsory.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

General Instructions :

सामान्य निर्देश :

The question paper consists of 29 questions divided into three Sections — A, B and C. Section-A comprises 10 questions of 1 mark each. Section-B comprises 12 questions of 4 marks each and Section-C comprises 7 questions of 6 marks each.

इस प्रश्न-पत्र में *29* प्रश्न हैं, जो तीन खण्डों - **अ, ब** और **स** में बँटे हुए हैं।

खण्ड-अ में *10* प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक *1* अंक का है,

खण्ड-व में *12* प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक *4* अंक का है तथा

खण्ड-स में *7* प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक *6* अंक का है।

Use of calculator is not permitted. However, you may ask for logarithmic and statistical tables, if required.

कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति नहीं है। आवश्यकता हो तो परीक्षार्थी की माँग पर लघुगणकीय तथा सांख्यिकीय सारणी उपलब्ध करायी जा सकती है।

https://www.jharkhandboard.com

Section – A

खण्ड – अ

1. Let $*$ be the binary operation on Z^+, defined by $a * b = |a - b|$. Find the value of $3 * 7$. 1

   मान लीजिए कि Z^+ में एक द्विआधारी संक्रिया $*$, $a * b = |a - b|$ द्वारा परिभाषित है, तो $3 * 7$ का मान ज्ञात कीजिए।

2. Evaluate $\sin\left\{\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$. 1

   $\sin\left\{\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. Find the values of x and y, where $\begin{bmatrix} 2x+y & 3y \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$. 1

   x तथा y का मान ज्ञात कीजिए जहाँ $\begin{bmatrix} 2x+y & 3y \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$.

4. Find minors of all the elements of $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$. 1

   $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ के सभी अवयवों का उपसारणिक ज्ञात कीजिए।

5. Find the slope of the tangent to the curve $x^2 + y^2 = 25$ at point $(-3, 4)$. 1

   वक्र $x^2 + y^2 = 25$ के विन्दु $(-3, 4)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

6. Find $\frac{dy}{dx} : y = \tan^{-1}x + \cot^{-1}x$. 1

   $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए : $y = \tan^{-1}x + \cot^{-1}x$.

7. Solve : $\int a^{3\log_a x} dx$. 1

   हल करें : $\int a^{3\log_a x} dx$.

https://www.jharkhandboard.com

8. For what value of p the vectors $3\hat{i}+2\hat{j}+9\hat{k}$ and $\hat{i}+p\hat{j}+3\hat{k}$ are parallel. 1

p के किस मान के लिए सदिश $3\hat{i}+2\hat{j}+9\hat{k}$ तथा $\hat{i}+p\hat{j}+3\hat{k}$ समान्तर हैं।

9. Find the order and degree of the differential equation $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+3\frac{d^2y}{dx^2}=0$. 1

अवकल समीकरण की कोटि एवं घात ज्ञात कीजिए $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+3\frac{d^2y}{dx^2}=0$.

10. Find the direction ratio and direction cosines of the line $\frac{x-5}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-4}{5}$. 1

रेखा $\frac{x-5}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-4}{5}$ के दिक् अनुपात एवं दिक् कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।

Section – B

खण्ड – ब

11. If the function $f:R\to R$ be given by $f(x)=x^2+2$ and $g:R\to R$ be given by $g(x)=\frac{x}{x-1}, x\neq 1$, find *fog* and *gof*. https://www.jharkhandboard.com 4

यदि फलन $f:R\to R$ तथा $g:R\to R$ इस प्रकार है कि $f(x)=x^2+2$ तथा $g(x)=\frac{x}{x-1}, x\neq 1$ तो *fog* तथा *gof* ज्ञात कीजिए।

12. Prove that $\tan^{-1}\frac{2}{3}+\sin^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{17}{6}$. 4

सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1}\frac{2}{3}+\sin^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{17}{6}$.

13. Prove that $\begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & y \\ z & x & z+x+2y \end{vmatrix}=2(x+y+z)^3$. 4

सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & y \\ z & x & z+x+2y \end{vmatrix}=2(x+y+z)^3$.

OR / अथवा

https://www.jharkhandboard.com

Prove that $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \beta+\gamma \\ \beta & \beta^2 & \gamma+\alpha \\ \gamma & \gamma^2 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$.

सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \beta+\gamma \\ \beta & \beta^2 & \gamma+\alpha \\ \gamma & \gamma^2 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$.

14. Find the relationship between a and b so that function f defined by

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{if } x \le 3 \\ bx+3 & \text{if } x > 3 \end{cases}$$

is continuous at $x = 3$. 4

a तथा b के बीच सम्बन्ध ज्ञात कीजिए जिनके लिए

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{यदि } x \le 3 \\ bx+3 & \text{यदि } x > 3 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $x = 3$ पर संतत है।

15. Find $\frac{dy}{dx}$, if $y = (\sin x)^x$. 4

$\frac{dy}{dx}$ निकालें, यदि $y = (\sin x)^x$.

OR / अथवा

If $y = \sin^{-1}x$, then show that $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$.

यदि $y = \sin^{-1}x$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$.

16. Find the intervals in which the function f given by

$f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ is

(a) strictly increasing, (b) strictly decreasing. 4

अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें फलन $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$

(a) निरंतर वर्धमान हो, (b) निरंतर ह्रासमान हो।

OR / अथवा

https://www.jharkhandboard.com

An edge of a variable cube is increasing at the rate of 3 cm/sec. How fast is the volume of the cube increasing when the edge is 10 cm long ?

एक परिवर्तनशील घन का किनारा 3 cm/sec की दर से बढ़ रहा है। घन का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि किनारा 10 cm लम्बा है ?

17. Find the value of $\int \frac{5x-2}{3x^2+2x+1} dx$. 4

मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{5x-2}{3x^2+2x+1} dx$.

18. Find the value of $\int \frac{2x-3}{(x^2-1)(2x+3)} dx$. 4

मान ज्ञात करें $\int \frac{2x-3}{(x^2-1)(2x+3)} dx$.

OR / अथवा

Evaluate $\int_a^b x dx$ as a limit of a sum.

योग की सीमा के रूप में $\int_a^b x dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

19. Evaluate $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x . \cos x} dx$. 4

मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x . \cos x} dx$.

20. If $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + 5\hat{j}$, $\vec{c} = \hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k}$, then find

(i) $2\vec{a} - \vec{b}$ (ii) $\vec{a} . \vec{c}$ (iii) $\vec{b} \times \vec{c}$ (iv) b^2. 4

यदि $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + 5\hat{j}$, $\vec{c} = \hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k}$ है, तो ज्ञात कीजिए

(i) $2\vec{a} - \vec{b}$ (ii) $\vec{a} . \vec{c}$ (iii) $\vec{b} \times \vec{c}$ (iv) b^2.

https://www.jharkhandboard.com

21. Find the angle between the following pair of lines :

$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ and $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{8}$.

निम्नलिखित रेखायुग्म के बीच का कोण ज्ञात कीजिए :

$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ तथा $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{8}$.

OR / अथवा

Find the equation of the plane that contains the point (1, −1, 2) and is perpendicular to each of the planes $2x + 3y - 2z = 5$ and $x + 2y - 3z = 8$.

उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसमें विन्दु (1, −1, 2) अंतर्विष्ट है तथा जो समतलों $2x + 3y - 2z = 5$ तथा $x + 2y - 3z = 8$ में से प्रत्येक पर लम्ब है।

22. Let A and B be independent events with $P(A) = 0 \cdot 3$ and $P(B) = 0 \cdot 4$, then find (i) $P(A \cap B)$, (ii) $P(A \cup B)$, (iii) $P\left(\frac{A}{B}\right)$, (iv) $P\left(\frac{B}{A}\right)$. 4

माना A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं तथा $P(A) = 0 \cdot 3$ तथा $P(B) = 0 \cdot 4$, तब ज्ञात कीजिए (i) $P(A \cap B)$, (ii) $P(A \cup B)$, (iii) $P\left(\frac{A}{B}\right)$, (iv) $P\left(\frac{B}{A}\right)$.

OR / अथवा

Mother, father and son line up at random for a family picture. Find $P\left(\frac{E}{F}\right)$ where

$E \rightarrow$ Son on one end

$F \rightarrow$ Father in middle.

एक पारिवारिक चित्र में माता, पिता व पुत्र यदृच्छया खड़े हैं तो $P\left(\frac{E}{F}\right)$ ज्ञात कीजिए जहाँ

$E \rightarrow$ पुत्र एक सिरे पर खड़ा है

$F \rightarrow$ पिता मध्य में खड़े हैं।

Section – C

खण्ड – स

23. Solve the system of linear equations using matrix method :

$x - y + 2z = 1$

$2y - 3z = 1$

$3x - 2y + 4z = 2$. 6

https://www.jharkhandboard.com

रेखीय समीकरण निकाय को आव्यूह विधि से हल करें :

$x - y + 2z = 1$

$2y - 3z = 1$

$3x - 2y + 4z = 2.$

OR / अथवा

Obtain the inverse of the matrix using elementary operations :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

प्रारंभिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम प्राप्त कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$ 12

24. Find the local maximum and local minimum values of the function f given by $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$. 6

$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$ द्वारा प्रदत्त फलन f के स्थानीय उच्चतम एवं स्थानीय निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

25. Find the area of the smaller region bounded by the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ and the line $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. 6

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ एवं रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ से घिरे लघु क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

OR / अथवा

Prove that $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$.

सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$.

26. Solve the differential equation $2xy + y^2 - 2x^2 \frac{dy}{dx} = 0,\ y = 2$ at $x = 1$. 6

अवकल समीकरण को हल कीजिए : $2xy + y^2 - 2x^2 \frac{dy}{dx} = 0,\ y = 2$ at $x = 1$.

OR / अथवा

https://www.jharkhandboard.com

Solve the differential equation $x.\log x\frac{dy}{dx}+y=\frac{2}{x}\log x$.

अवकल समीकरण को हल करें : $x.\log x\frac{dy}{dx}+y=\frac{2}{x}\log x$.

27. Find the shortest distance between the following pairs of parallel lines whose equations are $\vec{r}=(\hat{i}+\hat{j})+\lambda(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ and $\vec{r}=(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+\mu(4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})$. 6

समान्तर रेखाओं के निम्न युग्मों के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए जिनके समीकरण हैं $\vec{r}=(\hat{i}+\hat{j})+\lambda(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ तथा $\vec{r}=(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+\mu(4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})$.

28. Bag A contains 2 red and 3 black balls while another Bag B contains 3 red and 4 black balls. One ball is drawn at random from one of the bags and it is found to be red. Find the probability that it was drawn from Bag B. 6

थैला A में 2 लाल तथा 3 काली गेंदें हैं जबकि थैला B में 3 लाल तथा 4 काली गेंदें हैं। किसी एक थैला में से यदृच्छया एक गेंद निकाली गई है जो कि लाल रंग की है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि यह गेंद थैला B से निकाली गई है ?

OR / अथवा

Two cards are drawn successively with replacement from a well-shuffled deck of 52 cards. Find the probability distribution of the number of aces.

ताश के 52 पत्तों की एक सुमिश्रित गड्डी से दो पत्ते उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना के साथ निकाले जाते हैं। इक्कों की संख्या की प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

29. Solve the following LPP graphically : 6

Maximize $Z=3x+2y$

subject to constraints
$x+y\le 4$
$x-y\le 2$
$x,y\ge 0$.

आलेखीय विधि से निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए :

$Z=3x+2y$ अधिकतमीकरण कीजिये,

जबकि
$x+y\le 4$
$x-y\le 2$
$x,y\ge 0$.

https://www.jharkhandboard.com