

**2019
MATHEMATICS**

(Optional)

Full Marks - 100

Pass Marks - 33

Time - 3 Hours

All questions are compulsory.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

General Instructions :

सामान्य निर्देश :

*The question paper consists of 29 questions
divided into three Sections — A, B and C.*

Section-A comprises 10 questions of 1 mark each.

Section-B comprises 12 questions of 4 marks each and

Section-C comprises 7 questions of 6 marks each.

इस प्रश्न-पत्र में 29 प्रश्न हैं, जो तीन खण्डों - अ, ब और स में बँटे हुए हैं।

खण्ड-अ में 10 प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक 1 अंक का है,

खण्ड-ब में 12 प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक 4 अंक का है तथा

खण्ड-स में 7 प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक 6 अंक का है।

Use of calculator is not permitted. However,

you may ask for logarithmic and statistical tables, if required.

कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति नहीं है। आवश्यकता हो तो

परीक्षार्थी की माँग पर लघुगणकीय तथा सांख्यिकीय सारणी उपलब्ध करायी जा सकती है।

Section - A

खण्ड - अ

1. Let R be the set of real number. An operation $*$ is defined on R by
 $a * b = a + b + 2ab$. Then find the value of $2 * 3$.
माना कि R कोई वास्तविक संख्या का समुच्चय है। एक संक्रिया $*$ R पर इस प्रकार परिभाषित है कि $a * b = a + b + 2ab$ तो $2 * 3$ का मान ज्ञात कीजिए।
- ✓ 2. Find the value of $\cot^{-1}(-1)$.
मान ज्ञात कीजिए $\cot^{-1}(-1)$.
- ✓ 3. If $\begin{bmatrix} 2x+y & 2 \\ 1 & x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, then find the value of x and y .
यदि $\begin{bmatrix} 2x+y & 2 \\ 1 & x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, तो x और y का मान ज्ञात कीजिए।
4. Evaluate the determinant $\begin{vmatrix} \sin 70^\circ & -\cos 70^\circ \\ \sin 20^\circ & \cos 20^\circ \end{vmatrix}$.
सारणिक $\begin{vmatrix} \sin 70^\circ & -\cos 70^\circ \\ \sin 20^\circ & \cos 20^\circ \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।
- ✓ 5. If $y = \log(\sin x)$ then find $\frac{dy}{dx}$.
यदि $y = \log(\sin x)$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।
- ✓ 6. Find the value of $\int e^x(\tan x + \sec^2 x) dx$.
मान ज्ञात कीजिए $\int e^x(\tan x + \sec^2 x) dx$.
- ✓ 7. Find the slope of the tangent to the curve $y = x^3 - 2x + 1$ at the point $x = 2$.
वक्र $y = x^3 - 2x + 1$ के $x = 2$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

8. Find the value of λ for which the vector $\lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ is a unit vector.

λ के किस मान के लिए $\lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ एक इकाई सदिश है ?

9. Given $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ and $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$, then find the value of $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

यदि $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ तथा $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ हो, तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ का मान ज्ञात कीजिए।

10. Find the Cartesian equation of the plane whose vector equation is

$$\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}) = 7.$$

उस तल का कार्तीय समीकरण ज्ञात करें जिसके सदिश समीकरण $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}) = 7$ हैं।

Section - B

खण्ड - ब

11. Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be given by $f(x) = x^2 - 5x + 4$, then find the value of $f \circ f(1)$.

यदि $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 4$ द्वारा प्रदत्त है, तो $f \circ f(1)$ का मान ज्ञात कीजिए।

✓ 12. Prove that $\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{\pi}{4}$.

सिद्ध करें $\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{\pi}{4}$.

✓ 13. Prove that $\begin{vmatrix} a & a-b & a+b+c \\ 2a & 3a-2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a-3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix} = a^3$.

सिद्ध करें $\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix} = a^3$.

OR / अथवा

If $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, then show that $A^2 - 5A + 7I_2 = 0$. Hence find A^{-1} .

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो दिखाएँ कि $A^2 - 5A + 7I_2 = 0$, इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

14. Determine if f defined by $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$

is a continuous function.

निर्धारण करें कि क्या f जो निम्न प्रकार से परिभाषित है

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0 & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

एक संतत फलन है।

15. If $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$, then find $\frac{dy}{dx}$.

यदि $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

OR / अथवा

If $x^y + y^x = 1$, find $\frac{dy}{dx}$.

यदि $x^y + y^x = 1$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

✓ 16. Find the interval on which the function $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 40$, is increasing or decreasing.

अन्तराल ज्ञात कीजिए, जिसमें फलन $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 40$ वर्धमान या हासमान है।

OR / अथवा

A particle moves along the curve $y = \frac{2}{3}x^3 + 1$. Find the points on the curve at which y -co-ordinate is changing as twice as x -co-ordinate.

एक कण वक्र $y = \frac{2}{3}x^3 + 1$ के अनुदिश चलता है। वक्र पर उन बिन्दुओं को ज्ञात करें जहाँ y -नियामक, x -नियामक के दुगुनी दर से बदल रहा है।

17. Find the value of $\int \frac{x+3}{x^2-2x-5} dx$.

मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x+3}{x^2-2x-5} dx$.

18. Evaluate $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)(x-3)} dx$.

मान ज्ञात करें $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)(x-3)} dx$.

OR / अथवा

✓ Evaluate $\int_2^3 x^2 dx$ as limit of a sum.

योगफल की सीमा के रूप में $\int_2^3 x^2 dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

19. Evaluate $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x} + \sqrt{x}} dx$.

मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x} + \sqrt{x}} dx$.

✓ 20. If $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ then find (i) $2\vec{a} + \vec{b}$ (ii) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

(iii) $\vec{a} \times \vec{b}$ (iv) $|\vec{a} - \vec{b}|$.

यदि $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ तो ज्ञात कीजिए (i) $2\vec{a} + \vec{b}$ (ii) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

(iii) $\vec{a} \times \vec{b}$ (iv) $|\vec{a} - \vec{b}|$.

✓ 21. Find the angle between the planes

$$\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}) = 7 \text{ and } \vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}) = 5.$$

निम्नलिखित तलों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

$$\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}) = 7 \text{ तथा } \vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}) = 5.$$

OR / अथवा

Find the value of p so that the lines $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$ and

$$\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$$
 are perpendicular.

p का मान ज्ञात करें ताकि रेखाएँ $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$ तथा $\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$

परस्पर लम्ब हैं।

XASC-MAT (Opt.)-A.S.C.
Arts/Science/Commerce

22. Two cards are drawn at random and without replacement from a pack of 52 cards. Find the probability that both are black.
52 पत्तों की गड्डी में से यादृच्छया बिना प्रतिस्थापित किए गए दो पत्ते निकाले गए। दोनों पत्तों के काले होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

OR / अथवा

If $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ and $P(A/B) = \frac{2}{5}$, then find $P(A \cup B)$.

यदि $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ तथा $P(A/B) = \frac{2}{5}$, तो $P(A \cup B)$ का मान ज्ञात कीजिए।

Section - C

खण्ड - स

- ✓ 23. Using matrices, solve the following system of equations :
 $x + y + z = 3$, $x - 2y + 3z = 2$, $2x - y + z = 2$.

आव्यूह का प्रयोग कर निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल करें :

$$x + y + z = 3, x - 2y + 3z = 2, 2x - y + z = 2.$$

OR / अथवा

Find the inverse of the matrix using elementary operations :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

प्रारंभिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम प्राप्त कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- ✓ 24. Find the absolute maximum and absolute minimum of a function f given by $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ in the interval $[1, 5]$.

अन्तराल $[1, 5]$ में दिए गए फलन f जो परिभाषित है, $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ का निरपेक्ष महत्तम एवं निरपेक्ष न्यूनतम ज्ञात कीजिए।

- ✓ 25. Find the area of the region bounded by the parabola $y^2 = 4x$ and the line $x = 3$.

परवलय $y^2 = 4x$ एवं रेखा $x = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

OR / अथवा

Using integration, find the area of the region bounded by the triangle whose vertices are (1, 0), (2, 2) and (3, 1).

समाकलन का उपयोग करते हुए एक ऐसे त्रिभुज द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (1, 0), (2, 2) एवं (3, 1) हैं।

26. Solve the differential equation :

$$x \cdot \log x \cdot \frac{dy}{dx} + y = \frac{2}{x} \cdot \log x.$$

अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$x \cdot \log x \cdot \frac{dy}{dx} + y = \frac{2}{x} \cdot \log x.$$

OR / अथवा

Solve the differential equation :

$$x \cdot \frac{dy}{dx} - y = x \cdot \tan\left(\frac{y}{x}\right), \text{ given that } y = \frac{\pi}{2} \text{ when } x = 1.$$

अवकल समीकरण को हल करें :

$$x \cdot \frac{dy}{dx} - y = x \cdot \tan\left(\frac{y}{x}\right), \text{ यदि } y = \frac{\pi}{2} \text{ जब } x = 1.$$

27. Find the shortest distance between the lines

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) \text{ and } \vec{r} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k} + t(3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}).$$

रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए :

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) \text{ तथा } \vec{r} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k} + t(3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}).$$

28. A card from a pack of 52 cards is lost. From the remaining cards of the pack two cards are drawn and are found to be both diamonds. Find the probability of the lost card being a diamond.

52 ताशों की गड्डी से एक पत्ता खो जाता है। शेष पत्तों में से दो पत्ते निकाले जाते हैं, जो ईंट के पत्ते हैं। खो गए पत्ते को ईंट होने की प्रायिकता क्या है ?

OR / अथवा

A person buys 50 tickets of a lottery, in each of which his chance of winning a prize is $\frac{1}{100}$. What is the probability that he will win a prize

(a) at least once, (b) exactly once, (c) at least twice ?

एक व्यक्ति एक लॉटरी के 50 टिकट खरीदता है, जिसमें उसके प्रत्येक में जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{100}$ है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह (a) न्यूनतम एक बार, (b) तथ्यतः एक बार, (c) न्यूनतम दो बार, इनाम जीत लेगा ?

✓ 29. Solve the following LPP graphically :

$$\text{Minimize } Z = 20x + 50y$$

$$\text{Subject to constraints } x + 2y \geq 10$$

$$3x + 4y \leq 24$$

$$x \geq 0, y \geq 0.$$

आलेखीय विधि से निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए :

$$Z = 20x + 50y \text{ न्यूनतमीकरण कीजिये,}$$

$$\text{प्रतिबंधो } x + 2y \geq 10$$

$$3x + 4y \leq 24$$

$$x \geq 0, y \geq 0.$$