M-2013 3681028

Subject: Mathematics [Booklet Number]

Duration : Two Hours

Maximum Marks :100

Read the following instructions carefully.

1. This question paper contains all objective questions divided into three categories.
2. Category-I : Comprises of Q.1 to Q.60 carrying one mark each, for which only one option is correct.

   Category-II : Comprises of Q.61 to Q.75 carrying two marks each, for which only one option is correct.

   Category-III : Comprises of Q.76 to Q.80 carrying two marks each, for which one or more than one options may be correct.
3. For questions in Category-I or Category-II, incorrect answers will carry NEGATIVE marks. For Category-I, 1/3 mark will be deducted for each wrong answer. For Category-II, 2/3 mark will be deducted for each wrong answer.
4. Category-III questions will not carry any negative mark. Against the number of correct options indicated, a maximum of two marks will be awarded on pro rata basis. However, marking of any wrong option will lead to award of zero mark against the question irrespective of the number of correct options indicated.
5. Questions must be answered on Objective Response Sheet (ORS) by darkening the appropriate bubble (marked A, B, C, D) against the question number on the respective left hand columns.
6. All ORS will be processed by electronic means. Hence, invalidation of Answer Sheet due to folding or putting stray marks on it or any damage to the Answer Sheet as well as incomplete/incorrect filling of the Answer Sheet will be the sole responsibility of the candidate.
7. Answers without any response will be awarded zero mark. **For Category-I or Category-II, more than one response will be treated as incorrect answer** and negative marks will be awarded for the same.
8. Write your roll number, name and question booklet number at the specified locations of the ORS.
9. Use only **Black/Blue Ball Point Pen** to mark the answers by complete filling up of the respective bubbles.
10. **Mobile phones, Calculators, Slide Rules, Log Tables and Electronic Watches with facilities of Calculator, Charts, Graph sheets or any other form of Tables are NOT allowed** in the examination hall. Possession of such devices during the examinations may lead to cancellation of the paper besides seizing of the same.
11. Mark the answers only in the space provided. Please do not make any stray mark on the ORS.
12. Rough work can be done on the question paper itself. Additional blank pages are given at the end of the question paper for rough work.
13. This question paper contains 32 printed pages including pages for rough work. Please check all pages and report, if there is any discrepancy.
14. Please hand over the ORS to the Invigilator before leaving the Examination Hall.

δ

SEAL

SEAL

Category – I

Q.1 to Q.60 carry one mark each, for which only one option is correct. Any wrong answer will lead to deduction of 1/3 mark.

Q.1 A point P lies on the circle $x^2+y^2=169$. If $Q=(5,12)$ and $R=(-12,5)$, then the angle $\angle QPR$ is

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

Q.2 A circle passing through $(0,0),(2,6),(6,2)$ cuts the x-axis at the point $P\neq(0,0)$. Then the length of OP, where O is the origin, is

(A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ (C) 5 (D) 10

Q.3 The locus of the midpoints of the chords of an ellipse $x^2+4y^2=4$ that are drawn from the positive end of the minor axis, is

(A) a circle with centre $\left(\frac{1}{2},0\right)$ and radius 1

(B) a parabola with focus $\left(\frac{1}{2},0\right)$ and directrix $x=-1$

(C) an ellipse with centre $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, major axis 1 and minor axis $\frac{1}{2}$

(D) a hyperbola with centre $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, transverse axis 1 and conjugate axis $\frac{1}{2}$

Q.4 A point moves so that the sum of squares of its distances from the points $(1,2)$ and $(-2,1)$ is always 6. Then its locus is

(A) the straight line $y-\frac{3}{2}=-3\left(x+\frac{1}{2}\right)$

(B) a circle with centre $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ and radius $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(C) a parabola with focus $(1,2)$ and directrix passing through $(-2,1)$

(D) an ellipse with foci $(1,2)$ and $(-2,1)$

Q.5 For the variable t, the locus of the points of intersection of lines $x-2y=t$ and $x+2y=\frac{1}{t}$ is

(A) the straight line $x=y$

(B) the circle with centre at the origin and radius 1

(C) the ellipse with centre at the origin and one focus $\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0\right)$

(D) the hyperbola with centre at the origin and one focus $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},0\right)$

Q.6 Let $P = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ and $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Then P^3X is equal to

(A) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Q.7 The number of solutions of the equation $x+y+z=10$ in positive integers x, y, z, is equal to

(A) 36 (B) 55 (C) 72 (D) 45

Q.8 For $0 \leq P, Q \leq \frac{\pi}{2}$, if $\sin P + \cos Q = 2$, then the value of $\tan\left(\frac{P+Q}{2}\right)$ is equal to

(A) 1 (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Q.9 If α and β are the roots of $x^2 - x + 1 = 0$, then the value of $\alpha^{2013} + \beta^{2013}$ is equal to

(A) 2 (B) -2 (C) -1 (D) 1

Q.10 The value of the integral

$$\int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{x^{2013}}{e^{|x|}(x^2 + \cos x)} + \frac{1}{e^{|x|}} \right\} dx$$

is equal to

(A) 0 (B) $1 - e^{-1}$ (C) $2e^{-1}$ (D) $2(1 - e^{-1})$

Q.11 Let

$f(x) = 2^{100}x + 1,$

$g(x) = 3^{100}x + 1.$

Then the set of real numbers x such that $f(g(x)) = x$ is

(A) empty (B) a singleton
(C) a finite set with more than one element (D) infinite

Q.12 The limit of $x\sin(e^{1/x})$ as $x \to 0$

(A) is equal to 0 (B) is equal to 1 (C) is equal to $e/2$ (D) does not exist

Q.13 Let $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Then the matrix $P^3 + 2P^2$ is equal to

(A) P (B) $I-P$ (C) $2I+P$ (D) $2I-P$

Q.14 If α, β are the roots of the quadratic equation $x^2 + ax + b = 0, (b \neq 0)$; then the quadratic equation whose roots are $\alpha - \frac{1}{\beta}, \beta - \frac{1}{\alpha}$ is

(A) $ax^2 + a(b-1)x + (a-1)^2 = 0$
(B) $bx^2 + a(b-1)x + (b-1)^2 = 0$
(C) $x^2 + ax + b = 0$
(D) $abx^2 + bx + a = 0$

Q.15 The value of

$$1000\left[\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots\cdots + \frac{1}{999\times1000}\right]$$ is equal to

(A) 1000 (B) 999 (C) 1001 (D) 1/999

Q.16 The value of the determinant

$$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

is equal to

(A) 0 (B) $(1+a^2+b^2)$ (C) $(1+a^2+b^2)^2$ (D) $(1+a^2+b^2)^3$

Q.17 If the distance between the foci of an ellipse is equal to the length of the latus rectum, then its eccentricity is

(A) $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ (B) $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ (C) $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ (D) $\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$

Q.18 For the curve $x^2+4xy+8y^2=64$ the tangents are parallel to the x-axis only at the points

(A) $(0,2\sqrt{2})$ and $(0,-2\sqrt{2})$
(B) $(8,-4)$ and $(-8,4)$
(C) $(8\sqrt{2},-2\sqrt{2})$ and $(-8\sqrt{2},2\sqrt{2})$
(D) $(8,0)$ and $(-8,0)$

Q.19 The value of $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^{n+1}x)dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{n-1}(x/2)dx$ is equal to

(A) $\frac{1}{n}$ (B) $\frac{n+2}{2n+1}$ (C) $\frac{2n-1}{n}$ (D) $\frac{2n-3}{3n-2}$

Q.20 Let $f(\theta)=(1+\sin^2\theta)(2-\sin^2\theta)$. Then for all values of θ .

(A) $f(\theta)>\frac{9}{4}$ (B) $f(\theta)<2$ (C) $f(\theta)>\frac{11}{4}$ (D) $2\le f(\theta)\le\frac{9}{4}$

Q.21 Let $f(x) = \begin{cases} x^3-3x+2, & x<2 \\ x^3-6x^2+9x+2, & x\ge 2 \end{cases}$

Then

(A) $\lim_{x\to 2} f(x)$ does not exist
(B) f is not continuous at $x=2$
(C) f is continuous but not differentiable at $x=2$
(D) f is continuous and differentiable at $x=2$

Q.22 The limit of $\sum_{n=1}^{1000}(-1)^n x^n$ as $x\to\infty$

(A) does not exist
(B) exists and equals to 0
(C) exists and approaches $+\infty$
(D) exists and approaches $-\infty$

Q.23 If $f(x)=e^x(x-2)^2$ then

(A) f is increasing in $(-\infty,0)$ and $(2,\infty)$ and decreasing in $(0,2)$
(B) f is increasing in $(-\infty,0)$ and decreasing in $(0,\infty)$
(C) f is increasing in $(2,\infty)$ and decreasing in $(-\infty,0)$
(D) f is increasing in $(0,2)$ and decreasing in $(-\infty,0)$ and $(2,\infty)$

Q.24 Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be such that f is injective and $f(x)f(y)=f(x+y)$ for all $x,y\in\mathbb{R}$. If $f(x), f(y), f(z)$ are in G.P., then x,y,z are in

(A) A.P. always
(B) G.P. always
(C) A.P. depending on the values of x,y,z
(D) G.P. depending on the values of x,y,z

Q.25 The number of solutions of the equation
$\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x+1}{x+5}\right)+\log_9(x+5)^2=1$ is

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) infinite

Q.26 The area of the region bounded by the parabola $y=x^2-4x+5$ and the straight line $y=x+1$ is.

(A) 1/2 (B) 2 (C) 3 (D) 9/2

Q.27 The value of the integral
$\int_1^2 e^x\left(\log_e x+\frac{x+1}{x}\right)dx$ is

(A) $e^2(1+\log_e 2)$ (B) e^2-e (C) $e^2(1+\log_e 2)-e$ (D) $e^2-e(1+\log_e 2)$

Q.28 Let $P=1+\frac{1}{2\times 2}+\frac{1}{3\times 2^2}+\cdots\cdots$
and $Q=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{5\times 6}+\cdots\cdots$
Then

(A) $P=Q$ (B) $2P=Q$ (C) $P=2Q$ (D) $P=4Q$

Q.29 Let $f(x)=\sin x+2\cos^2 x$, $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{3\pi}{4}$. Then f attains its

(A) minimum at $x=\frac{\pi}{4}$
(B) maximum at $x=\frac{\pi}{2}$
(C) minimum at $x=\frac{\pi}{2}$
(D) maximum at $x=\sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

Q.30 Each of a and b can take values 1 or 2 with equal probability. The probability that the equation $ax^2+bx+1=0$ has real roots, is equal to

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{16}$

Q.31 There are two coins, one unbiased with probability $\frac{1}{2}$ of getting heads and the other one is biased with probability $\frac{3}{4}$ of getting heads. A coin is selected at random and tossed. It shows heads up. Then the probability that the unbiased coin was selected is

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{5}$

Q.32 For the variable t, the locus of the point of intersection of the lines $3tx-2y+6t=0$ and $3x+2ty-6=0$ is

(A) the ellipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

(B) the ellipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

(C) the hyperbola $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

(D) the hyperbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

Q.33 Cards are drawn one-by-one without replacement from a well shuffled pack of 52 cards. Then the probability that a face card (Jack, Queen or King) will appear for the first time on the third turn is equal to

(A) $\frac{300}{2197}$ (B) $\frac{36}{85}$ (C) $\frac{12}{85}$ (D) $\frac{4}{51}$

Q.34 Lines $x+y=1$ and $3y=x+3$ intersect the ellipse $x^2+9y^2=9$ at the points P,Q,R. The area of the triangle PQR is

(A) $\frac{36}{5}$ (B) $\frac{18}{5}$ (C) $\frac{9}{5}$ (D) $\frac{1}{5}$

Q.35 The number of onto functions from the set $\{1,2,\ldots\ldots,11\}$ to the set $\{1,2,\ldots\ldots,10\}$ is

(A) $5\times\underline{\lfloor 11}$ (B) $\underline{\lfloor 10}$ (C) $\frac{\underline{\lfloor 11}}{2}$ (D) $10\times\underline{\lfloor 11}$

Q.36 The limit of $\left[\frac{1}{x^2}+\frac{(2013)^x}{e^x-1}-\frac{1}{e^x-1}\right]$ as $x\to 0$

(A) approaches $+\infty$
(B) approaches $-\infty$
(C) is equal to $\log_e(2013)$
(D) does not exist

Q.37 Let $z_1=2+3i$ and $z_2=3+4i$ be two points on the complex plane. Then the set of complex numbers z satisfying $|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=|z_1-z_2|^2$ represents

(A) a straight line
(B) a point
(C) a circle
(D) a pair of straight lines

Q.38 Let $p(x)$ be a quadratic polynomial with constant term 1. Suppose $p(x)$ when divided by $x-1$ leaves remainder 2 and when divided by $x+1$ leaves remainder 4. Then the sum of the roots of $p(x)=0$ is

(A) -1 (B) 1 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

Q.39 Eleven apples are distributed among a girl and a boy. Then which one of the following statements is true?

(A) At least one of them will receive 7 apples
(B) The girl receives at least 4 apples or the boy receives at least 9 apples
(C) The girl receives at least 5 apples or the boy receives at least 8 apples
(D) The girl receives at least 4 apples or the boy receives at least 8 apples

Q.40 Five numbers are in H.P. The middle term is 1 and the ratio of the second and the fourth terms is 2:1. Then the sum of the first three terms is

(A) 11/2 (B) 5 (C) 2 (D) 14/3

Q.41 The limit of $\left\{\frac{1}{x}\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right\}$ as $x \to 0$

(A) does not exist (B) is equal to 1/2 (C) is equal to 0 (D) is equal to 1

Q.42 The maximum and minimum values of $\cos^6\theta+\sin^6\theta$ are respectively

(A) 1 and 1/4 (B) 1 and 0 (C) 2 and 0 (D) 1 and 1/2

Q.43 If a,b,c are in A.P., then the straight line $ax+2by+c=0$ will always pass through a fixed point whose co-ordinates are

(A) (1, −1) (B) (−1, 1) (C) (1, −2) (D) (−2, 1)

Q.44 If one end of a diameter of the circle $3x^2+3y^2-9x+6y+5=0$ is $(1, 2)$, then the other end is

(A) (2, 1) (B) (2, 4) (C) (2, −4) (D) (−4, 2)

Q.45 The value of $\cos^2 75° + \cos^2 45° + \cos^2 15° - \cos^2 30° - \cos^2 60°$ is

(A) 0 (B) 1 (C) 1/2 (D) 1/4

Q.46 Suppose $z=x+iy$ where x and y are real numbers and $i=\sqrt{-1}$. The points (x,y) for which $\frac{z-1}{z-i}$ is real, lie on

(A) an ellipse (B) a circle (C) a parabola (D) a straight line

Q.47 The equation $2x^2+5xy-12y^2=0$ represents a

(A) circle
(B) pair of non-perpendicular intersecting straight lines
(C) pair of perpendicular straight lines
(D) hyperbola

Q.48 The line $y=x$ intersects the hyperbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$ at the points *P* and *Q*. The eccentricity of ellipse with *PQ* as major axis and minor axis of length $\frac{5}{\sqrt{2}}$ is

(A) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (B) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{25}{9}$

δ

Q.49 The equation of the circle passing through the point $(1, 1)$ and the points of intersection of $x^2+y^2-6x-8=0$ and $x^2+y^2-6=0$ is

(A) $x^2+y^2+3x-5=0$
(B) $x^2+y^2-4x+2=0$
(C) $x^2+y^2+6x-4=0$
(D) $x^2+y^2-4y-2=0$

Q.50 Six positive numbers are in G.P., such that their product is 1000. If the fourth term is 1, then the last term is

(A) 1000 (B) 100 (C) 1/100 (D) 1/1000

Q.51 In the set of all 3×3 real matrices a relation is defined as follows. A matrix A is related to a matrix B if and only if there is a non-singular 3×3 matrix P such that $B=P^{-1}AP$. This relation is

(A) Reflexive, Symmetric but not Transitive
(B) Reflexive, Transitive but not Symmetric
(C) Symmetric, Transitive but not Reflexive
(D) an Equivalence relation

Q.52 The number of lines which pass through the point $(2,-3)$ and are at a distance 8 from the point $(-1,2)$ is

(A) infinite (B) 4 (C) 2 (D) 0

Q.53 If α,β are the roots of the quadratic equation $ax^2+bx+c=0$ and $3b^2=16ac$ then

(A) $\alpha=4\beta$ or $\beta=4\alpha$
(B) $\alpha=-4\beta$ or $\beta=-4\alpha$
(C) $\alpha=3\beta$ or $\beta=3\alpha$
(D) $\alpha=-3\beta$ or $\beta=-3\alpha$

Q.54 For any two real numbers a and b, we define $a\,R\,b$ if and only if $\sin^2 a+\cos^2 b=1$. The relation R is

(A) Reflexive but not Symmetric
(B) Symmetric but not Transitive
(C) Transitive but not Reflexive
(D) an Equivalence relation

Q.55 Let n be a positive even integer. The ratio of the largest coefficient and the 2nd largest coefficient in the expansion of $(1+x)^n$ is 11:10. Then the number of terms in the expansion of $(1+x)^n$ is

(A) 20 (B) 21 (C) 10 (D) 11

Q.56 Let $exp(x)$ denote the exponential function e^x. If $f(x)=exp\left(x^{\frac{1}{x}}\right), x>0$, then the minimum value of f in the interval $[2,5]$ is

(A) $exp\left(e^{\frac{1}{e}}\right)$ (B) $exp\left(2^{\frac{1}{2}}\right)$ (C) $exp\left(5^{\frac{1}{5}}\right)$ (D) $exp\left(3^{\frac{1}{3}}\right)$

Q.57 The sum of the series

$$\frac{1}{1\times 2}\,{}^{25}C_0+\frac{1}{2\times 3}\,{}^{25}C_1+\frac{1}{3\times 4}\,{}^{25}C_2+\cdots\cdots+\frac{1}{26\times 27}\,{}^{25}C_{25}$$

is

(A) $\frac{2^{27}-1}{26\times 27}$ (B) $\frac{2^{27}-28}{26\times 27}$ (C) $\frac{1}{2}\left(\frac{2^{26}+1}{26\times 27}\right)$ (D) $\frac{2^{26}-1}{52}$

Q.58 Five numbers are in A.P. with common difference $\neq 0$. If the 1st, 3rd and 4th terms are in G.P., then

(A) the 5th term is always 0
(B) the 1st term is always 0
(C) the middle term is always 0
(D) the middle term is always −2

Q.59 The minimum value of the function $f(x)=2|x-1|+|x-2|$ is

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

Q.60 If P,Q,R are angles of an isosceles triangle and $\angle P=\frac{\pi}{2}$, then the value of

$$\left(\cos\frac{P}{3}-i\sin\frac{P}{3}\right)^3+(\cos Q+i\sin Q)(\cos R-i\sin R)+(\cos P-i\sin P)(\cos Q-i\sin Q)$$
$(\cos R-i\sin R)$ is equal to

(A) i (B) $-i$ (C) 1 (D) −1

8

Category – II

Q.61 to Q.75 carry two marks each, for which only one option is correct. Any wrong answer will lead to deduction of 2/3 mark.

Q.61 A line passing through the point of intersection of $x+y=4$ and $x-y=2$ makes an angle $\tan^{-1}(3/4)$ with the x-axis. It intersects the parabola $y^2=4(x-3)$ at points (x_1,y_1) and (x_2,y_2) respectively. Then $|x_1-x_2|$ is equal to

(A) $\frac{16}{9}$ (B) $\frac{32}{9}$ (C) $\frac{40}{9}$ (D) $\frac{80}{9}$

Q.62 Let $[a]$ denote the greatest integer which is less than or equal to a. Then the value of the integral

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\sin x \cos x]\, dx$$ is

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) $-\pi$ (D) $-\pi/2$

Q.63 If $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$,

then P^5 equals

(A) P (B) $2P$ (C) $-P$ (D) $-2P$

Q.64 If $\sin^2\theta+3\cos\theta=2$, then $\cos^3\theta+\sec^3\theta$ is

(A) 1 (B) 4 (C) 9 (D) 18

Q.65 Let $x=1+\frac{1}{2\times\lfloor 1}+\frac{1}{4\times\lfloor 2}+\frac{1}{8\times\lfloor 3}+\cdots\cdots$

and $y=1+\frac{x^2}{\lfloor 1}+\frac{x^4}{\lfloor 2}+\frac{x^6}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$

Then the value of $\log_e y$ is

(A) e (B) e^2 (C) 1 (D) $1/e$

Q.66 The value of the infinite series

$$\frac{1^2+2^2}{\lfloor 3}+\frac{1^2+2^2+3^2}{\lfloor 4}+\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{\lfloor 5}+\cdots\cdots$$

is

(A) e (B) $5e$ (C) $\frac{5e}{6}-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5e}{6}$

Q.67 The value of the integral

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x - x\cos x)}{x(x+\sin x)}dx$$

is equal to

(A) $\log_e\left(\frac{2(\pi+3)}{2\pi+3\sqrt{3}}\right)$

(B) $\log_e\left(\frac{\pi+3}{2(2\pi+3\sqrt{3})}\right)$

(C) $\log_e\left(\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{2(\pi+3)}\right)$

(D) $\log_e\left(\frac{2(2\pi+3\sqrt{3})}{\pi+3}\right)$

Q.68 Let

$f(x) = x\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right), x>1.$ Then

(A) $f(x) \le 1$ (B) $1 < f(x) \le 2$ (C) $2 < f(x) \le 3$ (D) $f(x) > 3$

Q.69 Let $F(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{(1+t^2)}dt, 0 \le x \le 2\pi$. Then

(A) F is increasing in $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ and decreasing in $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ and $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$

(B) F is increasing in $(0,\pi)$ and decreasing in $(\pi,2\pi)$

(C) F is increasing $(\pi,2\pi)$ and decreasing in $(0,\pi)$

(D) F is increasing in $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ and $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ and decreasing in $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$

Q.70 Let $f(x) = x^{2/3}, x \ge 0$. Then the area of the region enclosed by the curve $y = f(x)$ and the three lines $y = x$, $x = 1$ and $x = 8$ is

(A) $\frac{63}{2}$ (B) $\frac{93}{5}$ (C) $\frac{105}{7}$ (D) $\frac{129}{10}$

Q.71 Let P be a point on the parabola $y^2 = 4ax$ with focus F. Let Q denote the foot of the perpendicular from P onto the directrix. Then $\frac{\tan\angle PQF}{\tan\angle PFQ}$ is

(A) 1 (B) 1/2 (C) 2 (D) 1/4

Q.72 An objective type test paper has 5 questions. Out of these 5 questions, 3 questions have four options each (A, B, C, D) with one option being the correct answer. The other 2 questions have two options each, namely True and False. A candidate randomly ticks the options. Then the probability that he/she will tick the correct option in at least four questions, is

(A) $\frac{5}{32}$ (B) $\frac{3}{128}$ (C) $\frac{3}{256}$ (D) $\frac{3}{64}$

Q.73 A family of curves is such that the length intercepted on the y-axis between the origin and the tangent at a point is three times the ordinate of the point of contact. The family of curves is

(A) $xy = c$, c is a constant (B) $xy^2 = c$, c is a constant

(C) $x^2y = c$, c is a constant (D) $x^2y^2 = c$, c is a constant

Q.74 The solution of the differential equation $(y^2 + 2x)\frac{dy}{dx} = y$ satisfies $x = 1, y = 1$. Then the solution is

(A) $x = y^2(1 + \log_e y)$

(B) $y = x^2(1 + \log_e x)$

(C) $x = y^2(1 - \log_e y)$

(D) $y = x^2(1 - \log_e x)$

Q.75 The solution of the differential equation $y \sin(x/y)\,dx = (x\sin(x/y) - y)dy$ satisfying $y(\pi/4) = 1$ is

(A) $\cos\frac{x}{y} = -\log_e y + \frac{1}{\sqrt{2}}$

(B) $\sin\frac{x}{y} = \log_e y + \frac{1}{\sqrt{2}}$

(C) $\sin\frac{x}{y} = \log_e x - \frac{1}{\sqrt{2}}$

(D) $\cos\frac{x}{y} = -\log_e x - \frac{1}{\sqrt{2}}$

Category – III

Q.76 to Q.80 carry two marks each, for which one or more than one options may be correct. Marking of correct options will lead to a maximum mark of two on pro rata basis. There will be no negative marking for these questions. However, any marking of wrong option will lead to award of zero mark against the respective question – irrespective of the number of correct options marked.

Q.76 The area of the region enclosed between parabola $y^2 = x$ and the line $y = mx$ is $\frac{1}{48}$. Then the value of m is

(A) –2 (B) –1 (C) 1 (D) 2

Q.77 Consider the system of equations:

$$x + y + z = 0$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$
$$\alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z = 0$$

Then the system of equations has

(A) a unique solution for all values of α, β, γ
(B) infinite number of solutions if any two of α, β, γ are equal
(C) a unique solution if α, β, γ are distinct
(D) more than one, but finite number of solutions depending on values of α, β, γ

Q.78 The equations of the circles which touch both the axes and the line $4x + 3y = 12$ and have centres in the first quadrant, are

(A) $x^2 + y^2 - x - y + 1 = 0$
(B) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
(C) $x^2 + y^2 - 12x - 12y + 36 = 0$
(D) $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 36 = 0$

Q.79 Which of the following real valued functions is/are not even functions?

(A) $f(x) = x^3 \sin x$
(B) $f(x) = x^2 \cos x$
(C) $f(x) = e^x x^3 \sin x$
(D) $f(x) = x - [x]$, where $[x]$ denotes the greatest integer less than or equal to x

Q.80 Let sin α, cos α be the roots of the equation $x^2 - bx + c = 0$. Then which of the following statements is/are correct?

(A) $c \le \frac{1}{2}$ (B) $b \le \sqrt{2}$ (C) $c > \frac{1}{2}$ (D) $b > \sqrt{2}$

END OF THE ENGLISH QUESTION PAPER

Category – I

Q.1 থেকে Q.60 প্রতিটি প্রশ্নে এক নম্বর আছে এবং প্রদত্ত উত্তরগুলির মধ্যে একটিমাত্র সঠিক। ভুল উত্তরের জন্য 1/3 নম্বর কাটা যাবে

Q.1 $x^2+y^2=169$ বৃত্তের উপরিস্থ একটি বিন্দু P। $Q=(5,12)$ এবং $R=(-12,5)$ হলে, $\angle QPR$ এর মান হল

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

Q.2 $(0,0),(2,6),(6,2)$ বিন্দুত্রয়গামী একটি বৃত্ত x-অক্ষকে ছিন্ন করে $P\neq(0,0)$ বিন্দুতে। মূলবিন্দু O হলে OP-র দৈর্ঘ্য হবে

(A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ (C) 5 (D) 10

Q.3 $x^2+4y^2=4$ উপবৃত্তের উপাক্ষের ধনাত্মক প্রত্যন্ত বিন্দুগামী জ্যাসমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ হবে

(A) একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র $\left(\frac{1}{2},0\right)$ এবং ব্যাসার্ধ 1

(B) একটি অধিবৃত্ত যার নাভিবিন্দু $\left(\frac{1}{2},0\right)$ এবং নিয়ামক $x=-1$

(C) একটি উপবৃত্ত যার কেন্দ্র $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, পরাক্ষ 1 এবং উপাক্ষ 1/2

(D) একটি পরাবৃত্ত যার কেন্দ্র $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, তির্যক অক্ষ 1 এবং অনুবন্ধী অক্ষ 1/2

Q.4 $(1,2)$ এবং $(-2,1)$ বিন্দুদ্বয় থেকে একটি গতিশীল বিন্দুর দূরত্বের বর্গদ্বয়ের সমষ্টি সর্বদা 6 হলে উক্ত বিন্দুটির সঞ্চারপথ হবে

(A) একটি সরলরেখা $y-\frac{3}{2}=-3\left(x+\frac{1}{2}\right)$

(B) একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(C) একটি অধিবৃত্ত যার নাভিবিন্দু $(1,2)$ এবং নিয়ামকটি $(-2,1)$ বিন্দুগামী

(D) একটি উপবৃত্ত যার নাভিদ্বয় হল $(1,2)$ এবং $(-2,1)$

Q.5 t একটি চলরাশি হলে $x-2y=t$ এবং $x+2y=\frac{1}{t}$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ হবে

(A) একটি সরলরেখা $x=y$

(B) একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং ব্যাসার্ধ্য 1

(C) একটি উপবৃত্ত যার কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং একটি নাভি $\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0\right)$

(D) একটি পরাবৃত্ত যার কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং একটি নাভি $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},0\right)$

Q.6 ধরি, $P = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ এবং $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$। তাহলে P^3X হবে

(A) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Q.7 যদি ধনাত্মক অখন্ড সংখ্যাত্রয় x, y, z সমীকরণ $x+y+z=10$ কে সিদ্ধ করে, তবে সমীকরণটির সমাধানগুলির সংখ্যা হবে

(A) 36 (B) 55 (C) 72 (D) 45

Q.8 $0 \le P, Q \le \frac{\pi}{2}$ -এর জন্য যদি $\sin P + \cos Q = 2$ হয়, তাহলে $\tan\left(\frac{P+Q}{2}\right)$ এর মান হল

(A) 1 (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Q.9 $x^2-x+1=0$ এর বীজদ্বয় α এবং β হলে, $\alpha^{2013}+\beta^{2013}$ এর মান হবে

(A) 2 (B) −2 (C) −1 (D) 1

Q.10 $\int_{-1}^{+1}\left\{\frac{x^{2013}}{e^{|x|}(x^2+\cos x)}+\frac{1}{e^{|x|}}\right\}dx$ এর মান হল

(A) 0 (B) $1-e^{-1}$ (C) $2e^{-1}$ (D) $2(1-e^{-1})$

Q.11 ধরা যাক

এবং $f(x) = 2^{100}x+1,$
$g(x) = 3^{100}x+1.$

তাহলে যে সব বাস্তব সংখ্যা x এর জন্য $f(g(x))=x$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, তাদের সেট হল

(A) শূন্য সেট (empty)
(B) একপদী সেট (a singleton)
(C) একটি সসীম সেট যার মধ্যে একাধিক পদ আছে
(D) অসীম সেট

Q.12 $x \to 0$ হলে $x\sin(e^{1/x})$ এর সীমামান

(A) 0 (B) 1 (C) $e/2$ (D) থাকে না

Q.13 ধরা যাক $I = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ এবং $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ । তবে P^3+2P^2 ম্যাট্রিক্সটি

(A) P-এর সমান (B) $I-P$-এর সমান (C) $2I+P$-এর সমান (D) $2I-P$-এর সমান

Q.14 $x^2+ax+b=0, (b\neq 0)$ দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজদ্বয় α,β হলে, $\alpha-\frac{1}{\beta}$ ও $\beta-\frac{1}{\alpha}$ যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ, তা হল

(A) $ax^2+a(b-1)x+(a-1)^2=0$
(B) $bx^2+a(b-1)x+(b-1)^2=0$
(C) $x^2+ax+b=0$
(D) $abx^2+bx+a=0$

Q.15 $1000\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots\cdots+\frac{1}{999\times1000}\right]$ এর মান হল

(A) 1000 (B) 999 (C) 1001 (D) 1/999

Q.16 $\begin{vmatrix}1+a^2-b^2 & 2ab & -2b\\2ab & 1-a^2+b^2 & 2a\\2b & -2a & 1-a^2-b^2\end{vmatrix}$
নির্ণায়কটির মান হল

(A) 0 (B) $(1+a^2+b^2)$ (C) $(1+a^2+b^2)^2$ (D) $(1+a^2+b^2)^3$

Q.17 একটি উপবৃত্তের নাভিদ্বয়ের মধ্যেকার দূরত্ব যদি তার নাভিলম্বের সাথে সমান হয়, তাহলে উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা হল

(A) $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ (B) $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ (C) $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ (D) $\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$

Q.18 $x^2+4xy+8y^2=64$ বক্ররেখাটির স্পর্শকগুলো x-অক্ষের সমান্তরাল হবে কেবলমাত্র

(A) $(0,2\sqrt{2})$ এবং $(0,-2\sqrt{2})$ বিন্দুতে
(B) $(8,-4)$ এবং $(-8,4)$ বিন্দুতে
(C) $(8\sqrt{2},-2\sqrt{2})$ এবং $(-8\sqrt{2},2\sqrt{2})$ বিন্দুতে
(D) $(8,0)$ এবং $(-8,0)$ বিন্দুতে

Q.19 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^{n+1}x)dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{n-1}(x/2)dx$ এর মান হল

(A) $\frac{1}{n}$ (B) $\frac{n+2}{2n+1}$ (C) $\frac{2n-1}{n}$ (D) $\frac{2n-3}{3n-2}$

Q.20 ধরা যাক $f(\theta)=(1+\sin^2\theta)(2-\sin^2\theta)$ । তবে θ র সমস্ত মানের জন্য

(A) $f(\theta)>\frac{9}{4}$ (B) $f(\theta)<2$ (C) $f(\theta)>\frac{11}{4}$ (D) $2\le f(\theta)\le\frac{9}{4}$

Q.21 ধরা যাক $f(x) = \begin{cases} x^3-3x+2, & x<2 \\ x^3-6x^2+9x+2, & x\ge 2 \end{cases}$
তবে

(A) $\lim_{x\to 2} f(x)$ এর অস্তিত্ব নেই
(B) $x=2$ বিন্দুতে f সন্তত (continuous) নয়
(C) $x=2$ বিন্দুতে f সন্তত (continuous) কিন্তু অবকলনযোগ্য নয়
(D) $x=2$ বিন্দুতে f সন্তত (continuous) কিন্তু অবকলনযোগ্য

Q.22 $x\to\infty$ হলে $\sum_{n=1}^{1000}(-1)^n x^n$ এর সীমা মান

(A) থাকে না
(B) আছে এবং তাহল 0
(C) আছে এবং $+\infty$ অভিমুখী
(D) আছে এবং $-\infty$ অভিমুখী

Q.23 যদি $f(x)=e^x(x-2)^2$ হয়, তাহলে

(A) $(-\infty,0)$ ও $(2,\infty)$ তে f ক্রমবর্ধমান ও $(0,2)$ তে ক্রমহ্রাসমান
(B) $(-\infty,0)$ তে f ক্রমবর্ধমান ও $(0,\infty)$ তে ক্রমহ্রাসমান
(C) $(2,\infty)$ তে f ক্রমবর্ধমান ও $(-\infty,0)$ তে ক্রমহ্রাসমান
(D) $(0,2)$ তে f ক্রমবর্ধমান এবং $(-\infty,0)$ ও $(2,\infty)$ তে ক্রমহ্রাসমান

Q.24 ধরা যাক, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ যেখানে f হল ইনজেকটিভ এবং $f(x)f(y)=f(x+y)$, সকল বাস্তব $x,y\in\mathbb{R}$ এর জন্য। যদি $f(x),f(y),f(z)$ G.P. তে থাকে তবে, x,y,z

(A) সর্বদা A.P. তে থাকবে

(B) সর্বদা G.P. তে থাকবে

(C) x,y,z এর মানের উপর নির্ভরশীল হয়ে A.P. তে থাকবে

(D) x,y,z এর মানের উপর নির্ভরশীল হয়ে G.P. তে থাকবে

Q.25 $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x+1}{x+5}\right)+\log_9(x+5)^2=1$ সমীকরণটির সমাধানের সংখ্যা হল

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) অসীম

Q.26 অধিবৃত্ত $y=x^2-4x+5$ এবং সরলরেখা $y=x+1$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হল

(A) 1/2 (B) 2 (C) 3 (D) 9/2

Q.27 $\int_1^2 e^x\left(\log_e x+\frac{x+1}{x}\right)dx$ সমাকলটির মান হল

(A) $e^2(1+\log_e 2)$ (B) e^2-e (C) $e^2(1+\log_e 2)-e$ (D) $e^2-e(1+\log_e 2)$

Q.28 ধরা যাক, $P=1+\frac{1}{2\times2}+\frac{1}{3\times2^2}+\cdots\cdots$

এবং $Q=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{5\times6}+\cdots\cdots$

তবে

(A) $P=Q$ (B) $2P=Q$ (C) $P=2Q$ (D) $P=4Q$

Q.29 যদি $f(x)=\sin x+2\cos^2 x,\ \frac{\pi}{4}\le x\le\frac{3\pi}{4}$ হয়, তবে

(A) $x=\frac{\pi}{4}$ তে f এর অবম মান থাকবে

(B) $x=\frac{\pi}{2}$ তে f এর চরম মান থাকবে

(C) $x=\frac{\pi}{2}$ তে f এর অবম মান থাকবে

(D) $x=\sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ তে f এর চরম মান থাকবে

Q.30 a এবং b প্রত্যেকটির মান 1 এবং 2 হওয়ার সম্ভাবনা সমান। $ax^2+bx+1=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব হওয়ার সম্ভাবনা হল

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{16}$

Q.31 দুটি মুদ্রা আছে যার একটি পক্ষপাতশূন্য এবং অপরটি পক্ষপাতদুষ্ট। উৎক্ষেপণ করলে পক্ষপাতশূন্য মুদ্রাটির হেড পরার সম্ভাবনা 1/2 এবং পক্ষপাতদুষ্ট মুদ্রাটির হেড পরার সম্ভাবনা 3/4। একটি মুদ্রাকে যদৃচ্ছভাবে বেছে নিয়ে উৎক্ষেপণ করা হল যার ফলে হেড পড়ল। এক্ষেত্রে পক্ষপাতশূন্য মুদ্রাটি নির্বাচনের সম্ভাবনা হল

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{5}$

Q.32 t একটি চলরাশি হলে $3tx-2y+6t=0$ এবং $3x+2ty-6=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ হবে

(A) একটি উপবৃত্ত $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

(B) একটি উপবৃত্ত $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

(C) একটি পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

(D) একটি পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

Q.33 52 টি তাসের একটি ভালভাবে মিশ্রিত প্যাকেট থেকে একটার পর একটা তাস টানা হল না ফেরত দিয়ে (without replacement)। ছবিসহ তাস (গোলাম, রানী ও রাজা) প্রথম বার পাওয়া যায় তৃতীয় টানে-এই ঘটনার সম্ভাবনা হল

(A) $\frac{300}{2197}$ (B) $\frac{36}{85}$ (C) $\frac{12}{85}$ (D) $\frac{4}{51}$

Q.34 $x+y=1$ এবং $3y=x+3$ সরলরেখাদ্বয় $x^2+9y^2=9$ উপবৃত্তকে P,Q এবং R বিন্দুতে ছেদ করে। PQR ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল হবে

(A) $\frac{36}{5}$ (B) $\frac{18}{5}$ (C) $\frac{9}{5}$ (D) $\frac{1}{5}$

Q.35 সেট $\{1,2,......,11\}$ থেকে $\{1,2,......,10\}$ সেটের উপরিচিত্রণের (onto functions) সংখ্যা হল

(A) $5\times\underline{|11}$ (B) $\underline{|10}$ (C) $\frac{\underline{|11}}{2}$ (D) $10\times\underline{|11}$

Q.36 $x\to 0$ হলে $\left[\frac{1}{x^2}+\frac{(2013)^x}{e^x-1}-\frac{1}{e^x-1}\right]$ রাশিমালাটির সীমামান

(A) $+\infty$ অভিমুখী
(B) $-\infty$ অভিমুখী
(C) $\log_e(2013)$ এর সমান
(D) অস্তিত্বহীন

Q.37 $z_1=2+3i$ এবং $z_2=3+4i$ হল জটিল তলের উপর অবস্থিত দুটি বিন্দু। তাহলে যে সমস্ত জটিলরাশি z-এর জন্য $|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=|z_1-z_2|^2$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, জটিল তলে তাদের জ্যামিতিক রূপ হল

(A) একটি সরলরেখা
(B) একটি বিন্দু
(C) একটি বৃত্ত
(D) সরলরেখা যুগল

Q.38 $p(x)$ হল একটি দ্বিঘাত রাশিমালা (quadratic polynomial) যার ধ্রুবক পদ 1। $p(x)$ কে $x-1$ এবং $x+1$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় যথাক্রমে 2 এবং 4। $p(x)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের যোগফল হবে

(A) -1 (B) 1 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

Q.39 এগারটি আপেল একটি বালিকা এবং একটি বালকের মধ্যে বন্টন করা হলে নিম্নের কোন উক্তিটি সত্য হবে ?

(A) কমপক্ষে একজন 7-টি আপেল পাবে
(B) বালিকাটি কমপক্ষে 4 টি আপেল পাবে অথবা বালকটি কমপক্ষে 9 টি আপেল পাবে
(C) বালিকাটি কমপক্ষে 5 টি আপেল পাবে অথবা বালকটি কমপক্ষে 8 টি আপেল পাবে
(D) বালিকাটি কমপক্ষে 4 টি আপেল পাবে অথবা বালকটি কমপক্ষে 8 টি আপেল পাবে

Q.40 5 টি সংখ্যার অনোন্যক সমান্তর প্রগতিতে আছে। যদি মধ্যম পদ1 এবং দ্বিতীয় ও চতুর্থ পদের অনুপাত 2:1 হয়, তবে প্রথম 3 টি পদের যোগফল হবে

(A) 11/2 (B) 5 (C) 2 (D) 14/3

Q.41 $x \to 0$ হলে $\left\{\frac{1}{x}\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right\}$ এর সীমামান হল

(A) অস্তিত্বহীন (B) 1/2 (C) 0 (D) 1

Q.42 $\cos^6\theta+\sin^6\theta$ এর গরিষ্ঠ এবং লঘিষ্ঠ মান যথাক্রমে

(A) 1 এবং 1/4 (B) 1 এবং 0 (C) 2 এবং 0 (D) 1 এবং 1/2

Q.43 যদি a,b,c সংখ্যাগুলি A.P. তে থাকে তাহলে $ax+2by+c=0$ সরলরেখাটি সর্বদা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায় - যার স্থানাঙ্ক হল

(A) (1, –1) (B) (–1, 1) (C) (1, –2) (D) (–2, 1)

Q.44 $3x^2+3y^2-9x+6y+5=0$ বৃত্তটির একটি ব্যাসের এক প্রান্তের স্থানাঙ্ক $(1, 2)$ হলে, অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক হল

(A) (2, 1) (B) (2, 4) (C) (2, –4) (D) (–4, 2)

Q.45 $\cos^2 75° + \cos^2 45° + \cos^2 15° - \cos^2 30° - \cos^2 60°$ এর মান হল

(A) 0 (B) 1 (C) 1/2 (D) 1/4

Q.46 ধরা যাক $z=x+iy$ যেখানে x ও y বাস্তব সংখ্যা এবং $i=\sqrt{-1}$ । (x,y) বিন্দুগুলি যার জন্য $\frac{z-1}{z-i}$ বাস্তব, অবস্থান করে

(A) একটি উপবৃত্তের উপর (B) একটি বৃত্তের উপর
(C) একটি অধিবৃত্তের উপর (D) একটি সরলরেখার উপর

Q.47 $2x^2+5xy-12y^2=0$ সমীকরণটি নির্দেশ করে

(A) বৃত্তকে
(B) সরলরেখাযুগলকে যে রেখা দুটি একে অপরকে ছেদ করে, কিন্তু লম্বভাবে নয়
(C) লম্বভাবে ছেদ করে এমন সরলরেখাযুগলকে
(D) পরাবৃত্তকে

Q.48 $y=x$ রেখাটি $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$ পরাবৃত্তটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। একটি উপবৃত্তের পরাক্ষ PQ এবং উপাক্ষের দৈর্ঘ্য $\frac{5}{\sqrt{2}}$ । উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা হল

(A) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (B) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{25}{9}$

Q.49 $(1,1)$ বিন্দুগামী এবং $x^2+y^2-6x-8=0$ ও $x^2+y^2-6=0$ এর ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ হল

(A) $x^2+y^2+3x-5=0$
(B) $x^2+y^2-4x+2=0$
(C) $x^2+y^2+6x-4=0$
(D) $x^2+y^2-4y-2=0$

Q.50 ছ'টি সংখ্যা G.P. তে আছে। তাদের গুণফল 1000 এবং চতুর্থ পদ হল 1। তবে শেষ পদ হবে

(A) 1000 (B) 100 (C) 1/100 (D) 1/1000

Q.51 3×3 ম্যাট্রিক্সদের সেট, যে ম্যাট্রিক্সগুলোর সমস্ত পদ বাস্তব সংখ্যা, সেই সেটের মধ্যে একটি সম্পর্ক (relation) সংজ্ঞাত হল এভাবে : ম্যাট্রিক্স A ম্যাট্রিক্স B এর সঙ্গে সম্পর্কিত হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি কোন একটি 3×3 নন-সিঙ্গুলার ম্যাট্রিক্স P পাওয়া যায় যাতে $B=P^{-1}AP$ হয়। তাহলে সম্পর্কটি

(A) স্বসম (reflexive) ও প্রতিসম (symmetric) কিন্তু সংক্রমণ (transitive) নয়
(B) স্বসম ও সংক্রমণ কিন্তু প্রতিসম নয়
(C) প্রতিসম ও সংক্রমণ কিন্তু স্বসম নয়
(D) একটি সমতুল্যতা (equivalence) সম্পর্ক

Q.52 $(2,-3)$ বিন্দুগামী এবং $(-1,2)$ বিন্দু থেকে 8 একক দূরত্বে থাকা সরলরেখার সংখ্যা

(A) অসীম (B) 4 (C) 2 (D) 0

Q.53 যদি $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজদ্বয় α,β হয় এবং $3b^2=16ac$ হয়, তাহলে

(A) $\alpha=4\beta$ অথবা $\beta=4\alpha$
(B) $\alpha=-4\beta$ অথবা $\beta=-4\alpha$
(C) $\alpha=3\beta$ অথবা $\beta=3\alpha$
(D) $\alpha=-3\beta$ অথবা $\beta=-3\alpha$

Q.54 যে কোন দুটি বাস্তব সংখ্যা a ও b এর জন্য আমরা ধরি $a\,R\,b$ যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\sin^2 a+\cos^2 b=1$ হয়। R সম্পর্কটি হল

(A) স্বসম কিন্তু প্রতিসম নয়
(B) প্রতিসম কিন্তু সংক্রমণ নয়
(C) সংক্রমণ কিন্তু স্বসম নয়
(D) একটি সমতুল্যতা সম্পর্ক

Q.55 ধরা যাক n একটি ধনাত্মক যুগ্ম অখন্ড সংখ্যা। $(1+x)^n$ এর বিস্তারে সর্বাধিক সহগ ও দ্বিতীয় সর্বাধিক সহগের অনুপাত হল 11:10 । তবে $(1+x)^n$ এর বিস্তারের পদসংখ্যা হল

(A) 20 (B) 21 (C) 10 (D) 11

Q.56 ধরা যাক, $f(x)=exp\left(x^{\frac{1}{x}}\right), x>0,$ যেখানে $exp(x)=e^x$ । $[2,5]$ অন্তরালে f এর অবম মান হবে

(A) $exp\left(e^{\frac{1}{e}}\right)$ (B) $exp\left(2^{\frac{1}{2}}\right)$ (C) $exp\left(5^{\frac{1}{5}}\right)$ (D) $exp\left(3^{\frac{1}{3}}\right)$

Q.57 $\frac{1}{1\times2}\,{}^{25}C_0+\frac{1}{2\times3}\,{}^{25}C_1+\frac{1}{3\times4}\,{}^{25}C_2+\cdots\cdots+\frac{1}{26\times27}\,{}^{25}C_{25}$ শ্রেণীটির যোগফল হল

(A) $\frac{2^{27}-1}{26\times27}$ (B) $\frac{2^{27}-28}{26\times27}$ (C) $\frac{1}{2}\left(\frac{2^{26}+1}{26\times27}\right)$ (D) $\frac{2^{26}-1}{52}$

Q.58 পাঁচটি সংখ্যা A.P. তে আছে, যেখানে সাধারণ অন্তর $\neq 0$ । যদি প্রথম, তৃতীয় ও চতুর্থ পদ G.P. তে থাকে, তাহলে

(A) পঞ্চম পদ সর্বদা 0 হবে
(B) প্রথম পদ সর্বদা 0 হবে
(C) মধ্য পদ সর্বদা 0 হবে
(D) মধ্য পদ সর্বদা –2 হবে

Q.59 $f(x)=2|x-1|+|x-2|$ এর অবম মান হল

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

Q.60 যদি P,Q,R একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের তিনটি কোণ হয় যেখানে $\angle P=\frac{\pi}{2}$, তবে $\left(\cos\frac{P}{3}-i\sin\frac{P}{3}\right)^3+(\cos Q+i\sin Q)(\cos R-i\sin R)+(\cos P-i\sin P)(\cos Q-i\sin Q)$ $(\cos R-i\sin R)$ এর মান

(A) i (B) $-i$ (C) 1 (D) -1

Category – II

Q.61 থেকে Q.75 প্রতিটি প্রশ্নে এক নম্বর আছে এবং প্রদত্ত উত্তরগুলির মধ্যে একটিমাত্র সঠিক। ভুল উত্তরের জন্য 2/3 নম্বর কাটা যাবে

Q.61 $x+y=4$ এবং $x-y=2$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী একটি সরলরেখা x-অক্ষের সঙ্গে $\tan^{-1}(3/4)$ কোণে নত। সরলরেখাটি অধিবৃত্ত $y^2=4(x-3)$ কে (x_1,y_1) এবং (x_2,y_2) বিন্দুতে ছেদ করে, তাহলে, $|x_1-x_2|=$

(A) $\frac{16}{9}$ (B) $\frac{32}{9}$ (C) $\frac{40}{9}$ (D) $\frac{80}{9}$

Q.62 যে কোন বাস্তব সংখ্যা a এর জন্য $[a]$ এর থেকে অর্থ হল সর্বোচ্চ পূর্ণ সংখ্যা যা a এর থেকে ছোট অথবা সমান। তা হলে,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\sin x \cos x]\, dx =$$

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) $-\pi$ (D) $-\pi/2$

Q.63 যদি $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

হয়, তবে $P^5=$

(A) P (B) $2P$ (C) $-P$ (D) $-2P$

Q.64 যদি $\sin^2\theta+3\cos\theta=2$, তবে $\cos^3\theta+\sec^3\theta=$

(A) 1 (B) 4 (C) 9 (D) 18

Q.65 যদি $x=1+\frac{1}{2\times\underline{|1}}+\frac{1}{4\times\underline{|2}}+\frac{1}{8\times\underline{|3}}+\cdots\cdots$

এবং $y=1+\frac{x^2}{\underline{|1}}+\frac{x^4}{\underline{|2}}+\frac{x^6}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$ হয়, তবে

$\log_e y$ এর মান হবে

(A) e (B) e^2 (C) 1 (D) $1/e$

Q.66 $\frac{1^2+2^2}{\underline{|3}}+\frac{1^2+2^2+3^2}{\underline{|4}}+\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{\underline{|5}}+\cdots\cdots$ এই অসীম শ্রেণীটির মান হল

(A) e (B) $5e$ (C) $\frac{5e}{6}-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5e}{6}$

Q.67 $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{(\sin x - x\cos x)}{x(x+\sin x)}dx$

সমাকলটির মান হল

(A) $\log_e\left(\frac{2(\pi+3)}{2\pi+3\sqrt{3}}\right)$

(B) $\log_e\left(\frac{\pi+3}{2(2\pi+3\sqrt{3})}\right)$

(C) $\log_e\left(\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{2(\pi+3)}\right)$

(D) $\log_e\left(\frac{2(2\pi+3\sqrt{3})}{\pi+3}\right)$

Q.68 ধরা যাক

$f(x)=x\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right), x>1$ । তা হলে

(A) $f(x)\le 1$

(B) $1<f(x)\le 2$

(C) $2<f(x)\le 3$

(D) $f(x)>3$

Q.69 ধরা যাক, $F(x)=\int_0^x \frac{\cos t}{(1+t^2)}dt, 0\le x\le 2\pi$ । তবে

(A) $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ তে F ক্রমবর্ধমান এবং $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ও $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ তে F ক্রমহ্রাসমান

(B) $(0,\pi)$ তে F ক্রমবর্ধমান এবং $(\pi,2\pi)$ তে F ক্রমহ্রাসমান

(C) $(\pi,2\pi)$ তে F ক্রমবর্ধমান এবং $(0,\pi)$ তে F ক্রমহ্রাসমান

(D) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ও $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ তে F ক্রমবর্ধমান এবং $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ তে F ক্রমহ্রাসমান

Q.70 যদি $f(x)=x^{2/3}, x\ge 0$ হয়, তবে বক্ররেখা $y=f(x)$ এবং সরলরেখাত্রয় $y=x, x=1$ এবং $x=8$ দ্বারা সীমাবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল হবে

(A) $\frac{63}{2}$

(B) $\frac{93}{5}$

(C) $\frac{105}{7}$

(D) $\frac{129}{10}$

Q.71 F নাভিবিশিষ্ট অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর উপর P একটি বিন্দু। যদি P থেকে নিয়ামকের উপর লম্বের পাদবিন্দু Q হয়, তবে $\frac{\tan\angle PQF}{\tan\angle PFQ}$ হবে

(A) 1

(B) 1/2

(C) 2

(D) 1/4

Q.72 একটি নৈর্ব্যক্তিক (objective) প্রশ্নপত্রে পাঁচটি প্রশ্ন আছে। এর মধ্যে তিনটি প্রশ্নের প্রত্যেকটির চারটি করে বিকল্প (A,B,C,D) আছে এবং একটি বিকল্প সঠিক। অন্য দুটি প্রশ্নে দুটি করে বিকল্প আছে : ঠিক ও ভুল। একজন পরীক্ষার্থী ইচ্ছেমত বিকল্পগুলো টিক(tick) মারল। অন্তত চারটি প্রশ্নের সঠিক বিকল্পে টিক মারার সম্ভাবনা হল

(A) $\frac{5}{32}$ (B) $\frac{3}{128}$ (C) $\frac{3}{256}$ (D) $\frac{3}{64}$

Q.73 বক্ররেখাগুচ্ছের মুলবিন্দু এবং একটি বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ভিতরে y-অক্ষ দ্বারা ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য স্পর্শবিন্দুর কোটির (ordinate) তিনগুণ, তাহলে বক্ররেখাগুচ্ছের সমীকরণ হল

(A) $xy=c$, c একটি ধ্রুবক
(B) $xy^2=c$, c একটি ধ্রুবক
(C) $x^2y=c$, c একটি ধ্রুবক
(D) $x^2y^2=c$, c একটি ধ্রুবক

Q.74 যদি $x=1, y=1$ অবকল সমীকরণ $(y^2+2x)\frac{dy}{dx}=y$ এর সমাধানকে সিদ্ধ করে তাহলে সমাধানটি হল

(A) $x=y^2(1+\log_e y)$
(B) $y=x^2(1+\log_e x)$
(C) $x=y^2(1-\log_e y)$
(D) $y=x^2(1-\log_e x)$

Q.75 অবকল সমীকরণ $y\sin(x/y)\,dx=(x\sin(x/y)-y)dy$, $y(\pi/4)=1$ এর সমাধান হল

(A) $\cos\frac{x}{y}=-\log_e y+\frac{1}{\sqrt{2}}$
(B) $\sin\frac{x}{y}=\log_e y+\frac{1}{\sqrt{2}}$
(C) $\sin\frac{x}{y}=\log_e x-\frac{1}{\sqrt{2}}$
(D) $\cos\frac{x}{y}=-\log_e x-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Category – III

Q.76 থেকে Q.80 প্রতিটি প্রশ্নে দুই নম্বর আছে এবং প্রদত্ত উত্তরগুলির এক বা একাধিক সঠিক। সঠিক উত্তরের সংখ্যার উপর আনুপাতিক হারে সর্বাধিক দুই নম্বর পাওয়া যেতে পারে। ভুল উত্তরের জন্য কোন নেগেটিভ নম্বর নেই। কিন্তু কোন ভুল উত্তর চিহ্নিত করলেই শূন্য নম্বর দেওয়া হবে।

Q.76 $y^2 = x$ অধিবৃত্ত ও $y = mx$ রেখার দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{48}$ হলে m -এর মান হল

(A) –2 (B) –1 (C) 1 (D) 2

Q.77
$$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma z &= 0 \\ \alpha^2 x+\beta^2 y+\gamma^2 z &= 0 \end{aligned}$$
এই সমীকরণসমূহের

(A) অদ্বিতীয় সমাধান আছে, সমস্ত α, β, γ র জন্য
(B) অসীম সংখ্যক সমাধান আছে, যদি α, β, γ র মধ্যে যে কোন দুটির মান সমান হয়
(C) অদ্বিতীয় সমাধান আছে, যদি α, β, γ সব পৃথক হয়
(D) একাধিক কিন্তু সসীম সংখ্যক সমাধান আছে যা α, β, γ র মানের উপর নির্ভরশীল

Q.78 যে সব বৃত্ত উভয় অক্ষকে $4x+3y=12$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে এবং যাদের কেন্দ্র প্রথম পাদে থাকে তাদের সমীকরণ হল

(A) $x^2+y^2-x-y+1=0$ (B) $x^2+y^2-2x-2y+1=0$
(C) $x^2+y^2-12x-12y+36=0$ (D) $x^2+y^2-6x-6y+36=0$

Q.79 নীচের কোন কোন বাস্তব অপেক্ষক (real valued function) যুগ্ম অপেক্ষক (even function) হবে না?

(A) $f(x)=x^3 \sin x$
(B) $f(x)=x^2 \cos x$
(C) $f(x)=e^x x^3 \sin x$
(D) $f(x)=x-[x]$, যেখানে $[x]$ নির্দেশ করে x বা তার চেয়ে ছোট সর্বোচ্চ অখন্ড সংখ্যাকে

Q.80 ধরা যাক $x^2-bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ । নীচের কোন বিবৃতিগুলো সঠিক?

(A) $c \le \frac{1}{2}$ (B) $b \le \sqrt{2}$ (C) $c > \frac{1}{2}$ (D) $b > \sqrt{2}$

END OF THE BENGALI QUESTION PAPER

Space for Rough Work

Space for Rough Work

SEAL

SEAL

δ