

Roll No. :

कुल प्रश्नों की संख्या : 29]
Total No. of Questions : 29]

[कुल मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 15
[Total No. of Printed Pages : 15

I-252204/804-C

विषय : गणित

Subject : Mathematics

समय : 3 घण्टे]
Time : 3 hours]

[पूर्णांक : 100
[Maximum Marks : 100

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Note : All questions are compulsory.

- सामान्य निर्देश** : (i) प्रश्न पत्र में कुल 29 प्रश्न हैं।
General Instructions : Total number of questions in this question paper are 29.
- (ii) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।
Use of calculator is not permitted.
- (iii) इस प्रश्न पत्र में ग्राफ पेपर की आवश्यकता है।
Graph paper is required in this question paper.

निर्देश : (अ) प्रश्न क्रमांक 1 से 4 तक अति लघु-उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 1 अंक निर्धारित है।

Instruction : (A) Question Nos. 1 to 4 are very short answer type questions. Each question carries 1 mark.

प्रश्न-1 यदि $\vec{a} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j}$ हों, तब $2\vec{b} \times \vec{a}$ का मान ज्ञात कीजिए।

[1]

If $\vec{a} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j}$, then find the value of $2\vec{b} \times \vec{a}$.

प्रश्न-2 $\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

[1]

Evaluate $\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$.

प्रश्न-3 यदि $\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$ हो, तब $a + b$ का मान ज्ञात कीजिए।

[1]

If $\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$, then find the value of $a + b$.

प्रश्न-4 अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/3} + x^{1/4} = 0$ की घात और कोटि

ज्ञात कीजिए।

[1]

Find the degree and order of differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/3} + x^{1/4} = 0.$$

निर्देश : (क) प्रश्न क्रमांक 5 से 12 तक लघु-उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 2 अंक निर्धारित हैं।

Instruction : (B) Question Nos. 5 to 12 are short answer type questions. Each question carries 2 marks.

प्रश्न-5 यदि $\tan^{-1} a + \tan^{-1} b + \tan^{-1} c = \pi/2$ हो, तब सिद्ध कीजिए कि $ab + bc + ca = 1$.

[2]

If $\tan^{-1} a + \tan^{-1} b + \tan^{-1} c = \pi/2$, then prove that

$$ab + bc + ca = 1.$$

प्रश्न-6 यदि $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \dots \infty}}}$ हो, तब सिद्ध

कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y-1}$. [2]

If $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \dots \infty}}}$, then prove

that $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y-1}$.

प्रश्न-7 $x = 0$ पर फलन $|x|$ के संतत का परीक्षण कीजिए। [2]

Examine the continuity of function $|x|$ at $x = 0$.

प्रश्न-8 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = 1 - x + y - xy$ को हल कीजिए। [2]

Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = 1 - x + y - xy$.

प्रश्न-9 $\int \frac{x^2 \tan^{-1} x^3}{1+x^6} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। [2]

Evaluate $\int \frac{x^2 \tan^{-1} x^3}{1+x^6} dx$.

[5]

प्रश्न-10 एक रेखा OP , x -अक्ष से 120° और y -अक्ष से 60° का कोण बनाती है।
रेखा द्वारा z -अक्ष पर बना कोण ज्ञात कीजिए।

[2]

A line OP , makes the angles of 120° and 60° with x -axis and y -axis respectively. Find the angle made by the line with z -axis.

प्रश्न-11 माना A तथा B ऐसी घटनाएँ हैं जहाँ $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$
और $P(B) = P$ है, तब P का मान ज्ञात कीजिए यदि घटनाएँ स्वतंत्र
हैं।

[2]

Let A and B are the events such that $P(A) = \frac{1}{2}$,
 $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ and $P(B) = P$. Find the value of P if
they are independent.

प्रश्न-12 यदि $\begin{vmatrix} x+3 & -2 \\ -3x & 2x \end{vmatrix} = 18$ हों, तब x का मान ज्ञात कीजिए।

[2]

✓ If $\begin{vmatrix} x+3 & -2 \\ -3x & 2x \end{vmatrix} = 18$, then find the value of x .

निर्देश : (स) प्रश्न क्रमांक 13 से 23 तक दीर्घ-उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रश्न क्रमांक 15, 20 एवं 21 में आंतरिक विकल्प हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 4 अंक निर्धारित हैं।

Instruction : (C) Question Nos. 13 to 23 are long answer type questions. Question Nos. 15, 20 and 21 have internal choice. Each question carries 4 marks.

प्रश्न-13 उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके विकर्ण $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ और $\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ हैं। [4]

Find the area of parallelogram whose diagonals are $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ and $\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$.

प्रश्न-14 एक न्याय्य सिक्का और एक अभिनत पासे को उछाला गया। मान लें A घटना 'सिक्के पर चित प्रकट होता है' और B घटना 'पासे पर संख्या 3 प्रकट होती है' को निरूपित करते हैं। निरीक्षण कीजिए कि घटनाएँ A और B स्वतंत्र हैं या नहीं। [4]

A fair coin and an unbiased die are tossed. Let A represents the event 'head appears on the coin' and B represents the event 'number 3 appears on the die'. Check whether A and B are independent events or not.

प्रश्न-15 सिद्ध कीजिए कि

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) = \frac{1}{2} \tan^{-1} x. \quad [4]$$

✓ Prove that

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) = \frac{1}{2} \tan^{-1} x.$$

अथवा

OR

हल कीजिए :

$$\tan^{-1}(x-1) + \tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(x+1) = \tan^{-1} 3x$$

Solve :

$$\tan^{-1}(x-1) + \tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(x+1) = \tan^{-1} 3x$$

प्रश्न-16/ यदि $y = e^{m \tan^{-1} x}$, तब सिद्ध कीजिए कि

$$(1+x^2)y_2 + (2x-m)y_1 = 0.$$

[4]

If $y = e^{m \tan^{-1} x}$, then prove that

$$(1+x^2)y_2 + (2x-m)y_1 = 0.$$

प्रश्न-17 यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$

इस प्रकार हैं कि $\vec{a} + \lambda\vec{b}$, \vec{c} पर लंब है, तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

[4]

✓ If $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ are such that $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ is perpendicular to \vec{c} , then find the value of λ .

प्रश्न-18 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2 \cos x$ को हल कीजिए, दिया

गया है कि $y = 0$ जब $x = \frac{\pi}{3}$.

[4]

✓ Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2 \cos x$, given that $y = 0$ when $x = \frac{\pi}{3}$.

प्रश्न-19

दो थैले A और B दिए हैं। थैले A में 3 लाल और 4 काली गेंदें हैं। थैले B में 5 लाल और 6 काली गेंदें हैं। किसी एक थैले से यदृच्छया एक गेंद निकाली गयी है जो कि लाल रंग की है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि यह गेंद थैले B से निकाली गयी है?

[4]

Two bags A and B are given. Bag A contains 3 red and 4 black balls while an other bag B contains 5 red and 6 black balls. One ball is drawn at random from one of the bags and it is found to be red. Find the probability that it was drawn from bag B .

प्रश्न-20

वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ के बिन्दु $(1, 1)$ पर स्पर्शरेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

[4]

Find the equation of the tangent to the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ at point $(1, 1)$.

अथवा

OR

a का वह न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए अंतराल $(1, 2)$ में $f(x) = x^2 + ax + 1$ से प्रदत्त फलन निरंतर वर्धमान है।

✓ Find the least value of a such that the function f given by $f(x) = x^2 + ax + 1$ is strictly increasing on interval $(1, 2)$.

प्रश्न-21 सिद्ध कीजिए कि पूर्णाकों के समुच्चय Z में $R = \{(a, b) : \text{संख्या } 5, (a - b) \text{ को विभाजित करती है} \}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है।

[4]

✓ Prove that the relation R in set of integers Z given by $R = \{(a, b) : (a - b) \text{ is divisible by number } 5\}$ is an equivalence relation.

अथवा

OR

यदि $f : R \rightarrow R$ तथा $g : R \rightarrow R$ फलन क्रमशः $f(x) = \cos x$

तथा $g(x) = 3x^2$ द्वारा परिभाषित हैं, तो $g \circ f$ और $f \circ g$ ज्ञात कीजिए।

सिद्ध कीजिए कि $g \circ f \neq f \circ g$.

If $f : R \rightarrow R$ and $g : R \rightarrow R$ are defined as $f(x) = \cos x$

and $g(x) = 3x^2$, then find $g \circ f$ and $f \circ g$. Prove that $g \circ f \neq f \circ g$.

प्रश्न-22 सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac + c^2 \\ a^2 + ab & b^2 & ac \\ ab & b^2 + bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2 \quad [4]$$

✓ Prove that

$$\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac + c^2 \\ a^2 + ab & b^2 & ac \\ ab & b^2 + bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

प्रश्न-23 $\int \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx$ का मान ज्ञात कीजिए। [4]

Evaluate

$$\int \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx.$$

निर्देश : (द) प्रश्न क्रमांक 24 से 29 तक दीर्घ-उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रश्न क्रमांक 26 एवं 29 में आंतरिक विकल्प हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 6 अंक निर्धारित हैं।

Instruction : (D) Question Nos. 24 to 29 are long answer type questions. Question Nos. 26 and 29 have internal choice. Each question carries 6 marks.

प्रश्न-24 यदि $x^y = e^{y-x}$, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \log_e x}{(1 - \log_e x)^2} \quad [6]$$

If $x^y = e^{y-x}$, then prove that

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \log_e x}{(1 - \log_e x)^2}$$

प्रश्न-25 सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{\pi/2} \log_e \sin x = \frac{\pi}{2} \log_e \left(\frac{1}{2} \right) \quad [6]$$

Prove that

$$\int_0^{\pi/2} \log_e \sin x = \frac{\pi}{2} \log_e \left(\frac{1}{2} \right)$$

प्रश्न-26 परवलय $y^2 = 4ax$ और सरल रेखा $y = mx$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

[6]

Find the area enclosed between parabola $y^2 = 4ax$ and straight line $y = mx$.

अथवा

OR

वक्रों $y^2 = 4x$ और $x^2 = 4y$ के बीच का क्षेत्रफल समाकलन विधि से ज्ञात कीजिए।

Find the area between the curves $y^2 = 4x$ and $x^2 = 4y$ by integration method. <https://www.cgboardonline.com>

प्रश्न-27 फलन $P = 2x + 3y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए जबकि प्रतिबंध निम्न हैं :

[6]

$$x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 10, 2x + y \leq 14$$

Find the maximum value of the function $P = 2x + 3y$ when the constraints are the following :

$$x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 10, 2x + y \leq 14$$

प्रश्न-28 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हों, तो सत्यापित कीजिए कि

$A \text{ adj } A = |A| I$ और A^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

[6]

✓ If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, then verify that $A \text{ adj } A = |A| I$ and

also find A^{-1} .

प्रश्न-29 समतलों $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 7$ और $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 9$ के प्रतिच्छेदन तथा बिन्दु $(2, 1, 3)$ से जाने वाले समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

[6]

✓ Find the vector equation of the plane passing through the intersection of the planes $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 7$ and $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 9$ and the point $(2, 1, 3)$.

[15]

अथवा

OR

सरल रेखाओं $\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1}$ और $\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$

के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

✓ Find the shortest distance between the straight lines

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1} \quad \text{and} \quad \frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$$

...