

कुल प्रश्नों की संख्या : 29]
Total No. of Questions : 29]

[कुल मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 15
[Total No. of Printed Pages : 15

C-232204/804-A

विषय : गणित
Subject : Mathematics

समय : 3 घंटे]
Time : 3 Hours]

[पूर्णांक : 100
[Maximum Marks : 100

सामान्य निर्देश :

- (1) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (2) प्रश्न पत्र में कुल 29 प्रश्न हैं।
- (3) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

General Instructions :

- (i) All questions are compulsory.
- (ii) Total number of questions in this question paper is 29.
- (iii) Use of calculator is not permitted.

निर्देश :

(अ) प्रश्न क्रमांक 1 से 4 तक अति लघु उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 1 अंक निर्धारित है।

Instruction :

(A) Question Nos. 1 to 4 are very short answer type questions. Each question carry 1 mark.

C-232204/804-A

P.T.O.

(2)

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

(Very Short Answer Type Questions)

प्रश्न-1. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

है तो $A + B$ का मान ज्ञात कीजिए।

1

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

then find $A + B$.

प्रश्न-2. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$

परस्पर लम्ब हैं तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

1

If $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$

are mutually perpendicular, then find the value of λ .

प्रश्न-3. अवकल समीकरण :

1

$$2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

की कोटि एवं घात ज्ञात कीजिए।

Find order and degree of differential equation :

$$2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

(3)

प्रश्न-4. मान ज्ञात कीजिए :

1

$$\int \frac{(\log x)^2}{x} dx$$

Evaluate :

$$\int \frac{(\log x)^2}{x} dx$$

निर्देश :

(ब) प्रश्न क्रमांक 5 से 12 तक लघु उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 2 अंक निर्धारित हैं।

Instruction :

(B) Question Nos. 5 to 12 are short answer type questions. Each question carries 2 marks.

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

(Short Answer Type Questions)

प्रश्न-5.
$$\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$$

का मान ज्ञात कीजिए।

2

Find the value of :

$$\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$$

प्रश्न-6. $\cos (\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x)$

का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of :

$$\cos (\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x)$$

प्रश्न-7. दर्शाइए कि फलन :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3 & \text{यदि } x \neq 0 \\ 1 & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ पर संतत नहीं है।

Show that the function :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3 & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

is not continuous at $x = 0$.

प्रश्न-8. यदि $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ और A तथा B स्वतंत्र घटनाएं हैं,

तो $P(A \cap B)$ का मान ज्ञात कीजिए।

If A and B are independent event and $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{1}{5}$,

then find $P(A \cap B)$.

प्रश्न-9. अवकल समीकरण :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} \text{ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।}$$

(5)

Find general solution of the differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

प्रश्न-10. $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ का अवकलज ज्ञात कीजिए। 2

Find the derivative of the function $f(x) = \cos(\sqrt{x})$.

प्रश्न-11. एक रेखा की दिक् कोज्या ज्ञात कीजिए जो निर्देशाक्षों के साथ समान कोण बनाती है। 2

Find the direction cosine of a line which makes equal angles with the co-ordinate axis.

प्रश्न-12. मान ज्ञात कीजिए : 2

$$\int \frac{dx}{1 - \tan x}$$

Evaluate :

$$\int \frac{dx}{1 - \tan x}$$

निर्देश :

(स) प्रश्न क्रमांक 13 से 23 तक दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रश्न क्रमांक 14, 15 एवं 21 में आंतरिक विकल्प हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 4 अंक निर्धारित हैं।

Instruction :

(C) Question Nos. 13 to 23 are long answer type questions. Question Nos. 14,

15 and 21 have internal choice. Each question carries 4 marks.

(6)

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

(Long Answer Type Questions)

प्रश्न-13. यदि $y = e^{m \cos^{-1} x}$ तो सिद्ध कीजिये :

4

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - m^2y = 0$$

If $y = e^{m \cos^{-1} x}$ prove that :

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - m^2y = 0$$

प्रश्न-14. वे अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ द्वारा प्रदत्त फलन f

4

(अ) निरंतर वर्द्धमान है

(ब) निरंतर हासमान है

Find the intervals in which the function f given by $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$

is :

(a) Strictly increasing

(b) Strictly decreasing

अथवा OR

एक घन का आयतन 9 सेमी³/सेकण्ड की दर से बढ़ रहा है। यदि इसके कोर की लंबाई 10 सेमी.

है, तो इसके पृष्ठ का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है ?

(7)

The volume of a cube is increasing at the rate of $9 \text{ cm}^3/\text{sec}$. If its core is 10

cm at what rate the surface area is increasing ?

प्रश्न-15. यदि $f(x) = \frac{4x+3}{6x-4}, x \neq \frac{2}{3}$,

तो सिद्ध कीजिये कि सभी $x \neq \frac{2}{3}$ के लिये $f \circ f(x) = x$ है। f का प्रतिलोम फलन क्या है ? 4

If $f(x) = \frac{4x+3}{6x-4}, x \neq \frac{2}{3}$,

Prove that for every $x \neq \frac{2}{3}$, $f \circ f(x) = x$. Find inverse function of f .

अथवा OR

तीन फलन $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ तथा $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ पर विचार कीजिए जहाँ :

$$f(x) = 2x,$$

$$g(y) = 3y + 4,$$

$$h(z) = \sin z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{N}$$

सिद्ध कीजिए कि

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

(8)

Consider $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ and $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ defined as :

$$f(x) = 2x,$$

$$g(y) = 3y + 4,$$

$$h(z) = \sin z \quad \forall x, y \text{ and } z \in \mathbb{N}$$

Show that

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

प्रश्न-16. पासों के एक जोड़े को तीन बार उछालने पर दिकों (doublets) की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिये।

4

A pair of dice is thrown three times. Find the probability distribution of getting doublets.

प्रश्न-17. सिद्ध कीजिए कि :

4

$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

Prove that :

$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

(9)

प्रश्न-18. अवकल समीकरण

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{1}{1+x^2} \text{ को हल कीजिये}$$

जहाँ $y = 0$ तब $x = 1$

4

Solve the differential equation

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{1}{1+x^2}$$

where $y = 0$ and $x = 1$.

प्रश्न-19.

एक व्यक्ति के बारे में ज्ञात है कि वह 4 में से 3 बार सत्य बोलता है। वह एक पासे को उछालता

है और बताता है कि इस पर आने वाली संख्या 6 है। इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

पासे पर आने वाली संख्या 6 है।

4

A man is known to speak truth 3 out of 4 times. He throws a dice and reports

that it is a six. Find the probability it is actually a six.

प्रश्न-20.

मान लीजिए \vec{a} , \vec{b} और \vec{c} तीन सदिश इस प्रकार हैं कि $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ और $|\vec{c}|=5$ तथा

इनमें से प्रत्येक अन्य दो सदिशों के योगफल पर लम्बवत् हैं,

तो $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ ज्ञात कीजिए।

4

(10)

Let \vec{a} , \vec{b} and \vec{c} be three vectors such that $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ and $|\vec{c}|=5$ and each one of them being perpendicular to the sum of the other two.

Find $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$.

प्रश्न-21. सिद्ध कीजिये :

4

$$\tan \sqrt{x} = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$$

Prove that :

$$\tan \sqrt{x} = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$$

अथवा OR

सिद्ध कीजिये :

$$\tan^{-1} \left(\frac{x+1}{x} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{2x+1} \right) = \frac{\pi}{4}$$

Prove that :

$$\tan^{-1} \left(\frac{x+1}{x} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{2x+1} \right) = \frac{\pi}{4}$$

प्रश्न-22. उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ और

$\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ द्वारा दी गयी हैं।

4

Find the area of parallelogram whose adjacent sides are

$$\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k} \text{ and}$$

$$\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}.$$

प्रश्न-23. $\int \frac{e^x(1+\sin x)}{(1+\cos x)} dx$

का मान ज्ञात कीजिये।

4

Evaluate :

$$\int \frac{e^x(1+\sin x)}{(1+\cos x)} dx$$

निर्देश :

(द) प्रश्न क्रमांक 24 से 29 तक दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रश्न क्रमांक 26 एवं 27 में आंतरिक विकल्प का प्रावधान है। प्रत्येक प्रश्न पर 6 अंक निर्धारित हैं।

Instruction :

(D) Question Nos. 24 to 29 are long answer type questions. Question Nos. 26 and 27 have internal choice. Each question carries 6 marks.

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

(Long Answer Type Questions)

प्रश्न-24. यदि $x^y = e^{x-y}$ हो, तो सिद्ध कीजिये :

6

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$

If $x^y = e^{x-y}$, prove that :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1 + \log x)^2}$$

प्रश्न-25. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

का मान ज्ञात कीजिये।

6

Evaluate :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

प्रश्न-26. यदि वक्र $x = y^2$ एवं रेखा $x = 4$ से घिरा हुआ क्षेत्रफल $x = a$ द्वारा दो बराबर भागों में विभाजित होता है, तो a का मान ज्ञात कीजिये।

6

If the area bounded by the curve $x = y^2$ and line $x = 4$ is equally divided into two parts by $x = a$. Find the value of a . <https://www.cgboardonline.com>

अथवा OR

x अक्ष के ऊपर तथा वृत्त $x^2 + y^2 = 8x$ एवं परवलय $y^2 = 4x$ में मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area lying above x axis and included between the circle $x^2 + y^2 = 8x$ and inside of the parabola $y^2 = 4x$.

(13)

प्रश्न-27. समतलों $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ और $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = -5$ के प्रतिच्छेदन तथा बिन्दु $(1, 1, 1)$

से जाने वाले समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

6

Find the vector equation of the plane passing through the intersection of the

plane $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ and $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = -5$ and the point $(1, 1, 1)$.

अथवा OR

रेखाओं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$

और

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$$

के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the shortest distance between the lines :

$$\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$$

and

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$$

(14)

प्रश्न-28. आलेखीय विधि से फलन $z = 3x + 9y$ का न्यूनतम मान निम्नलिखित अवरोधों के अन्तर्गत

6

ज्ञात कीजिए :

$$x + 3y \leq 60$$

$$x + y \geq 10$$

$$x \leq y$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Solve the following linear programming graphically :

Minimize

$$z = 3x + 9y$$

subject to the following constraints :

$$x + 3y \leq 60$$

$$x + y \geq 10$$

$$x \leq y$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

प्रश्न-29. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ को सममित और विषम सममित आव्यूह के योग के रूप में प्रदर्शित कीजिये।

6