Name : ....

Roll No. : ....

कुल प्रश्नों की संख्या : **29**]
Total No. of Questions : **29**]

[कुल मुद्रित पृष्ठों की संख्या : **8**
[Total No. of Printed Pages : **8**

T-222204/804–A

विषय : गणित

Subject : Mathematics

समय : **3** घण्टे]
Time : **3 hours**]

[पूर्णांक : **100**
[Maximum Marks : **100**

सामान्य निर्देश : (*i*) **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं।
(*ii*) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

General Instructions : (*i*) **All** questions are compulsory.
(*ii*) Use of Calculator is not permitted.

निर्देश : (अ) प्रश्न क्रमांक **1** से **4** तक अतिलघुउत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 1 अंक निर्धारित है।

Instruction : (A) Question Nos. **1** to **4** are very short answer type questions. Each question carries 1 mark.

प्रश्न-1 यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\3 & 2\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}-2 & 5\\3 & 4\end{bmatrix}$ हों, तो $3A-B$ का मान ज्ञात कीजिए। [1]

If matrix $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\3 & 2\end{bmatrix}$ and $B=\begin{bmatrix}-2 & 5\\3 & 4\end{bmatrix}$, then find the value of $3A-B$.

प्रश्न-2 मान ज्ञात कीजिए : $\int 2x\sin(x^2+1)dx$ [1]

Evaluate : $\int 2x\sin(x^2+1)dx$

प्रश्न-3 $|\vec{a}-\vec{b}|$ का मान ज्ञात कीजिए यदि $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3$ और $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ [1]

Find the value of $|\vec{a}-\vec{b}|$ if $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3$ and $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$

प्रश्न-4 अवकल समीकरण की कोटि तथा घात ज्ञात कीजिए : [1]

$$xy\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$$

Find the order and degree of differential equation :

$$xy\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$$

निर्देश : (ब) प्रश्न क्रमांक 5 से 12 तक लघुउत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 2 अंक निर्धारित हैं।

Instruction : (B) Question Nos. **5** to **12** are short answer type questions. Each question carries 2 marks.

प्रश्न-5 x का मान ज्ञात कीजिए यदि $\begin{vmatrix}2 & 4\\5 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & 4\\6 & x\end{vmatrix}$ [2]

Find the value of x if $\begin{vmatrix}2 & 4\\5 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & 4\\6 & x\end{vmatrix}$

प्रश्न-6 सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x)=|x|, x=0$ पर संतत है। [2]

Prove that function $f(x)=|x|$ is continuous of $x=0$.

प्रश्न-7 सिद्ध कीजिए कि $\sec^{-1}x+\operatorname{cosec}^{-1}x=\frac{\pi}{2},\ \forall |x|\geq 1$ [2]

Prove that $\sec^{-1}x+\operatorname{cosec}^{-1}x=\frac{\pi}{2},\ \forall |x|\geq 1$

प्रश्न-8 मान ज्ञात कीजिए $\int \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}\,dx$. [2]

Find the value of $\int \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}\,dx$.

प्रश्न-9 अवकल समीकरण हल कीजिए : [2]

$$\frac{dy}{dx}=\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)$$

Solve the differential equation :

$$\frac{dy}{dx}=\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)$$

प्रश्न-10 यदि किसी सरल रेखा की दिक् कोज्याएँ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ हों, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$$ [2]

If the direction cosines of a line are $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, then prove that

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$$

प्रश्न-11 यदि $P(A)=\frac{6}{11}$, $P(B)=\frac{5}{11}$ तथा $P(A\cap B)=\frac{4}{11}$ हों, तो $P\left(\frac{B}{A}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए। [2]

If $P(A)=\frac{6}{11}$, $P(B)=\frac{5}{11}$ and $P(A\cap B)=\frac{4}{11}$, then find the value of $P\left(\frac{B}{A}\right)$.

प्रश्न-12 यदि $y = \tan(2x+3)$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। [2]

If $y = \tan(2x+3)$, then find the value of $\frac{dy}{dx}$.

निर्देश : (स) प्रश्न क्रमांक **13** से **23** तक दीर्घउत्तरीय प्रश्न हैं। प्रश्न क्रमांक **14, 16** एवं **18** में आंतरिक विकल्प हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 4 अंक निर्धारित हैं।

Instruction : (C) Question Nos. **13** to **23** are long answer type questions. Question Nos. **14, 16** and **18** have internal choice. Each question carries 4 marks.

प्रश्न-13 यदि दो इकाई सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}|\vec{a}-\vec{b}|$. [4]

If angle between two unit vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ be θ, then prove that $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}|\vec{a}-\vec{b}|$.

प्रश्न-14 सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ का उच्चतम मान $\sqrt{2}$ है। [4]

Prove that maximum value of function $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ is $\sqrt{2}$.

अथवा/OR

एक स्थिर झील में एक पत्थर डाला जाता है और तरंगें वृत्तों में 4 सेमी./सेकंड की गति से चलती हैं। जब वृत्ताकार तरंग की त्रिज्या 10 सेमी. है, तब उस क्षण परिबद्ध क्षेत्रफल कितनी तेजी से बढ़ रहा है ?

A stone is dropped in a quiet lake and waves move in circles at a speed of 4 cm per second. At the instant when the radius of circular wave is 10 cm, then how fast is the enclosed area increasing?

प्रश्न-15 सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix} = (5x+4)(4-x)^2$ [4]

Prove that $\begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix} = (5x+4)(4-x)^2$

प्रश्न-16 सिद्ध कीजिए कि $\cos^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \cos^{-1}\frac{33}{65}$. [4]

Prove that $\cos^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \cos^{-1}\frac{33}{65}$.

अथवा/OR

यदि $\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \frac{\pi}{4}$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of x if $\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \frac{\pi}{4}$.

प्रश्न-17 मोहन 75% प्रकरणों में तथा सोहन 80% प्रकरणों में सच बोलता है। उस घटना की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जबकि मोहन सच तथा सोहन झूठ बोलता है। [4]

Mohan tells the truth in 75% cases while Sohan in 80% cases. Find the probability that Mohan tells the truth and Sohan tells lie to narrate an incident.

प्रश्न-18 सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों के समुच्चय Z में $R = \{(a, b) :$ संख्या 5, $(a-b)$ को विभाजित करती है $\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है। [4]

Prove that the relation R in set of integers Z given by $R = \{(a, b) : (a-b)$ is divisible by number $5\}$ is an equivalence relation.

अथवा/OR

यदि $f : R \rightarrow R$ तथा $g : R \rightarrow R$ फलन क्रमशः $f(x) = x^2 + 2$ तथा $g(x) = \frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$ द्वारा परिभाषित हैं, तो $g \circ f$ तथा $f \circ g$ ज्ञात कीजिए। सिद्ध कीजिए कि $g \circ f \neq f \circ g$.

Find $g \circ f$ and $f \circ g$ if $f : R \rightarrow R$ and $g : R \rightarrow R$ are given by functions $f(x) = x^2 + 2$ and $g(x) = \frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$ respectively. Show that $g \circ f \neq f \circ g$.

प्रश्न-19 यदि $y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। [4]

If $y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$, then find $\frac{dy}{dx}$.

प्रश्न-20 अवकल समीकरण हल कीजिए : [4]

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$$

Solve the differential equation :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$$

प्रश्न-21 मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ [4]

Evaluate : $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

प्रश्न-22 यदि $\vec{a} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{k}$ हों, तो $\left|2\vec{b} \times \vec{a}\right|$ का मान ज्ञात कीजिए। [4]

If $\vec{a} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{k}$, then find the value of $\left|2\vec{b} \times \vec{a}\right|$.

प्रश्न-23 एक कलश में 5 लाल और 5 काली गेंदें हैं। यादृच्छया एक गेंद निकाली जाती है, इसका रंग नोट करने के बाद पुनः कलश में रख दी जाती है। पुनः निकाले गए रंग की दो अतिरिक्त गेंदें कलश में रखी जाती हैं तथा कलश से एक गेंद निकाली जाती है। दूसरी गेंद के लाल होने की प्रायिकता क्या है ? [4]

An urn contains 5 red and 5 black balls. A ball is drawn at random, its colour is noted and is returned to the urn. Moreover 2 additional balls of the colour drawn are put in the urn and then a ball is drawn. What is the probability that the second ball is red?

निर्देश : (द) प्रश्न क्रमांक **24** से **29** तक दीर्घउत्तरीय प्रश्न हैं। प्रश्न क्रमांक **26** एवं **29** में आंतरिक विकल्प का प्रावधान है। प्रत्येक प्रश्न पर 6 अंक निर्धारित हैं।

Instruction : (D) Question Nos. **24** to **29** are long answer type questions. Question Nos. **26** and **29** have internal choice. Each question carries 6 marks.

प्रश्न-24 यदि $y\log x = x - y$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$ [6]

If $y\log x = x - y$, then prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$

https://www.cgboardonline.com

प्रश्न-25 सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi/2} (2\log\sin x - \log\sin 2x)dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$ [6]

Prove that $\int_0^{\pi/2} (2\log\sin x - \log\sin 2x)dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$

प्रश्न-26 दो परवलयों $y = x^2$ एवं $y^2 = x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [6]

Find the area bounded by two parabolas $y = x^2$ and $y^2 = x$.

अथवा/OR

उस त्रिभुज का क्षेत्रफल समाकलन द्वारा ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ $y = 2x + 1$, $y = 3x + 1$ तथा $x = 4$ हैं।

Find the area of triangle by integration whose sides are $y = 2x + 1$, $y = 3x + 1$ and $x = 4$.

प्रश्न-27 आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। [6]

Find the inverse of matrix $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}$.

प्रश्न-28 आलेखीय विधि द्वारा निम्न रैखिक प्रोगामन समस्या को हल कीजिए : [6]

निम्न व्यवरोधों के अंतर्गत

$$x+y\le 50,\ 3x+y\le 90,\ x\ge 0, y\ge 0$$

$Z=4x+y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

Solve the linear programming graphically :

Subject to the following constraints

$$x+y\le 50,\ 3x+y\le 90,\ x\ge 0, y\ge 0$$

find the maximum value of $Z=4x+y$.

प्रश्न-29 रेखाओं $\vec{r}=\hat{i}+\hat{j}+\lambda(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ और

$$\vec{r}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}+\mu(3\hat{i}-5\hat{j}+2\hat{k})$$

के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए (सदिश विधि से)। [6]

Find (by vector method) the shortest distance between the lines

$$\vec{r}=\hat{i}+\hat{j}+\lambda(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}) \text{ and}$$
$$\vec{r}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}+\mu(3\hat{i}-5\hat{j}+2\hat{k}).$$

अथवा/OR

बिन्दुओं (2, 2, –1), (3, 4, 2) और (7, 0, 6) से जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the plane passing through the points (2, 2, –1), (3, 4, 2) and (7, 0, 6).

. . . .