

अनुक्रमांक

नाम

131

324(FJ)

2022

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट ] [ पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

- निर्देश :
- इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
  - सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
  - प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
  - प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
  - प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
  - जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions :

- There are in all nine questions in this question paper.

324(FJ)

2

- All questions are compulsory.
- In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.
- Marks allotted to the questions are indicated against them.
- Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

- क)  $\tan^{-1} \sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$  का मान बराबर है
- $\pi$
  - $-\pi/3$
  - $\pi/3$
  - $2\pi/3$

ख) मान लीजिए कि समुच्चय  $N$  में

$$R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\}$$

द्वारा परिभाषित सम्बन्ध है तो

- $(2, 4) \in R$
- $(3, 8) \in R$
- $(8, 6) \in R$
- $(6, 8) \in R$

ग)  $3 \times 3$  कॉर्ट के ऐसे आव्यूहों की कुल संख्या कितनी होगी जबकि प्रत्येक प्रविष्टि 0 या 1 है ?

- (i) 512                      (ii) 81  
(iii) 18                      (iv) 27 ✓                      1

घ) कौन-सा फलन  $x = 1$  पर अवकलनीय नहीं है ?

- (i)  $f(x) = |x - 2|$   
(ii)  $f(x) = |x - 1|$   
(iii)  $f(x) = \frac{x}{|x|}$   
(iv)  $f(x) = |x + 1|$  ✓                      1

ङ) भुजा में 3% वृद्धि के कारण भुजा  $x$  cm के घन के आयतन में सत्रिकटे परिवर्तन है

- (i)  $0.06 x^3 \text{ cm}^3$   
(ii)  $0.6 x^3 \text{ cm}^3$   
(iii)  $0.09 x^3 \text{ cm}^3$   
(iv)  $0.9 x^3 \text{ cm}^3$  ✓                      1

1. Attempt all parts of the following :

a) Value of  $\tan^{-1} \sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$  is

- (i)  $\pi$                       (ii)  $-\pi/3$   
(iii)  $\pi/3$                       (iv)  $2\pi/3$  ✓

b) A relation  $R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\}$  is defined on the set  $N$ . Then

- (i)  $(2, 4) \in R$   
(ii)  $(3, 8) \in R$   
(iii)  $(8, 6) \in R$   
(iv)  $(6, 8) \in R$                       1

c) How many total number of matrices of order  $3 \times 3$  are there whose entries are 0 or 1 ?

- (i) 512                      (ii) 81  
(iii) 18                      (iv) 27                      1

d) Which function is not differential on  $x = 1$  ?

- (i)  $f(x) = |x - 2|$   
(ii)  $f(x) = |x - 1|$   
(iii)  $f(x) = \frac{x}{|x|}$   
(iv)  $f(x) = |x + 1|$                       1

e) What is the approximate change in the volume of a cube whose side is  $x$  cm, caused by increase of 3% in the side ?

- (i)  $0.06 x^3 \text{ cm}^3$   
(ii)  $0.6 x^3 \text{ cm}^3$   
(iii)  $0.09 x^3 \text{ cm}^3$   
(iv)  $0.9 x^3 \text{ cm}^3$                       1

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क)  $\int \frac{dx}{1+\tan x}$  का मान ज्ञात कीजिए। 1

ख) वक्र  $y^2 = 4x$ ,  $y$ -अक्ष एवं रेखा  $y = 3$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 1

ग) अवकल समीकरण  $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y-2}$  ( $y \neq 2$ ) का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 1

घ) सदिशों  $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$  और  $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$  के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 1

ङ) यदि  $A$  तथा  $B$  दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं जहाँ  $P(A) = 0.3$ ,  $P(B) = 0.6$  हों तो  $P(A \cap B)$  ज्ञात कीजिए। 1

2. Attempt all parts of the following :

a) Evaluate  $\int \frac{dx}{1+\tan x}$ . 1

b) Find the area of the region bounded by the curve  $y^2 = 4x$ ,  $y$ -axis and line  $y = 3$ . 1

c) Find the general solution of the differential equation  $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y-2}$  ( $y \neq 2$ ). 1

d) Find the angle between the vectors  $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$  and  $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ . 1

e) If  $A$  and  $B$  are two independent events where  $P(A) = 0.3$ ,  $P(B) = 0.6$  then find  $P(A \cap B)$ . 1

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि पूर्णाकों के समुच्चय  $Z$  में  $R = \{(a, b) : 2 \mid (a - b)\}$  को विभाजित करती है ; द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध एक तुल्यता सम्बन्ध है। 2

ख) यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  तो दिखाइए  $|2A| = 4|A|$ . 2

ग)  $x$  के सापेक्ष  $x^{\sin x}$  का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए ( $x > 0$ ). 2

घ) किस अन्तराल में फलन  $f(x) = x^2 - 4x - 6$  वर्धमान है ? 2

3. Attempt all parts of the following :

a) Prove that a relation  $R = \{(a, b) : 2 \mid (a - b)\}$  on the set of integers  $Z$ , is an equivalence relation. 2



324(FJ)

b). If  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  then show that  
 $|2A| = 4|A|$ . 2

c) Find differential coefficient of  $x^{\sin x}$   
 with respect to  $x$  ( $x > 0$ ). 2

d) In which interval is the function  
 $f(x) = x^2 - 4x + 6$  increasing? 2

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क)  $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$  का मान ज्ञात कीजिए। 2

ख) बिन्दुओं  $(-2, 4, -5)$  और  $(1, 2, 3)$  को  
 मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन ज्ञात  
 कीजिए। 2

ग) निम्न अवरोधों के अन्तर्गत  $Z = 3x + 9y$  का  
 न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए :  
 $x + 3y \leq 60, x + y \geq 10, x \leq y,$   
 $x \geq 0, y \geq 0$ . 2

घ) एक परिवार में दो बच्चे हैं, इनमें कम से कम  
 एक बच्चा लड़का है, तो दोनों बच्चों के लड़का  
 होने की क्या प्रायिकता है? 2

324(FJ)

8

4. Attempt all the parts of the following :

a) Evaluate  $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ . 2

b) Find direction cosines of the line  
 joining the points  $(-2, 4, -5)$  and  
 $(1, 2, 3)$ . 2

c) Find the minimum value of  
 $Z = 3x + 9y$  under the following  
 restrictions :  $x + 3y \leq 60,$   
 $x + y \geq 10, x \leq y, x \geq 0, y \geq 0$ . 2

d) There are two children in a family,  
 in which at least one child is boy.  
 What is the probability that both  
 children are boy? 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल  
 कीजिए :

क) यदि  $P(x) = X$  के समस्त उपसमुच्चयों का  
 समुच्चय है जहाँ  $X \neq \phi$ , एक सम्बन्ध  
 $R, P(x)$  पर इस प्रकार परिभाषित है कि  
 $ARB$  यदि और केवल यदि  $A \subset B$  है। सिद्ध  
 कीजिए कि  $R$  तुल्यता सम्बन्ध नहीं है। 5

ख) यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  है तो सिद्ध कीजिए कि

$$A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0. \quad 5$$

ग) यदि  $(\cos x)^y = (\cos y)^x$  है तो  $\frac{dy}{dx}$  ज्ञात कीजिए। 5

घ)  $f(x) = x + \sin 2x$  का  $[0, 2\pi]$  पर उच्चतम तथा निम्नतम मान ज्ञात कीजिए। 5

ङ)  $(255)^{1/4}$  का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। 5

च) सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} (y+z)^2 & xy & zx \\ xy & (x+z)^2 & yz \\ xz & yz & (x+y)^2 \end{vmatrix} = 2xyz(x+y+z)^3$$

5

5. Attempt any five parts of the following :

a) If  $P(x) =$  set of all subsets of  $X$ , where  $X \neq \phi$ , a relation  $R$  is defined on  $P(x)$  as  $ARB$  if and only if  $A \subset B$ . Prove that  $R$  is not an equivalence relation. 5

b) If  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  then prove that

$$A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0. \quad 5$$

c) If  $(\cos x)^y = (\cos y)^x$  then find  $\frac{dy}{dx}$ . 5

d) Find the maximum and minimum values of  $f(x) = x + \sin 2x$  on  $[0, 2\pi]$ . 5

e) Find approximate value of  $(255)^{1/4}$ . 5

f) Prove that

$$\begin{vmatrix} (y+z)^2 & xy & zx \\ xy & (x+z)^2 & yz \\ xz & yz & (x+y)^2 \end{vmatrix} = 2xyz(x+y+z)^3$$

5

6. निर्मालिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क)  $\int (\cot \sqrt{x} + \tan \sqrt{x}) dx$  ज्ञात कीजिए। 5

ख) रेखाओं  $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

और  $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 5

ग) अवकल समीकरण

$$x \cos\left(\frac{y}{x}\right) \frac{dy}{dx} = y \cos\left(\frac{y}{x}\right) + x$$
 का हल

ज्ञात कीजिए। 5

- घ) आलेखीय विधि द्वारा निम्न रेखिक प्रोग्रामन समस्या को निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत हल कीजिए :

$$x + y \leq 8, \quad x \leq 5, \quad y \leq 5, \quad x + y \geq 4, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0$$

$Z = 10(x - 7y + 190)$  का न्यूनतमीकरण कीजिए। 5

- ड) एक बक्से में दस कार्ड 1 से 10 तक पूर्णांक लिखकर रखे गये हैं। उन्हें अच्छी तरह मिलाया गया तथा बक्से से एक कार्ड यादृच्छया निकाला गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाले गये कार्ड पर संख्या 3 से अधिक है, तथा इस संख्या सम हो। 5

- च) यदि तीन सदिश  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  तथा  $\vec{c}$  इस प्रकार हैं कि  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 4$  तथा  $|\vec{c}| = 5$  और इनमें से प्रत्येक, अन्य दो सदिशों के योगफल पर लम्बवत् हैं तो  $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$  को ज्ञात कीजिए। 5

6. Attempt any *five* parts of the following :

- a) Evaluate :

$$\int (\cot \sqrt{x} + \tan \sqrt{x}) dx \quad 5$$

- b) Find the shortest distance between the lines

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}) \text{ and}$$

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}). \quad 5$$

- c) Find the solution of the differential equation

$$x \cos\left(\frac{y}{x}\right) \frac{dy}{dx} = y \cos\left(\frac{y}{x}\right) + x. \quad 5$$

- d) Solve the following linear programming problem by graphical method, under the following constraints :

$$x + y \leq 8, \quad x \leq 5, \quad y \leq 5, \quad x + y \geq 4,$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0. \text{ Minimize}$$

$$Z = 10(x - 7y + 190). \quad 5$$

- e) Ten cards numbered 1 to 10 are put in a box. The cards are mixed in well manner and one card is drawn at random from the box. Find the probability that the number appeared on the card is greater than 3 and the number is an even number. 5

- f) If there are three vectors  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  and  $\vec{c}$  such as  $|\vec{a}|=3$ ,  $|\vec{b}|=4$  and  $|\vec{c}|=5$  and each vector is perpendicular to the sum of other two vectors, find  $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ . 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क)  $\int_0^\pi \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$  का मान ज्ञात कीजिए। 8

- ख)  $x = 0$  एवं  $x = 2\pi$  के मध्य वक्र  $y = \cos x$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 8

7. Attempt any one part of the following :

- a) Evaluate :

$$\int_0^\pi \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \quad 8$$

- b) Find the area of the region bounded by  $y = \cos x$ ,  $x = 0$  and  $x = 2\pi$ . 8

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

- क) निम्नलिखित समीकरण निकाय

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

- $4x - 3y + 2z = 4$  को आव्यूह विधि से हल कीजिए। 8

- ख) i) यदि  $y = e^{a \cos^{-1} x}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$  है तो सिद्ध कीजिए कि

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0. \quad 4$$

- ii) यदि  $x = a(\cos t + t \sin t)$  और

$$y = a(\sin t - t \cos t) \text{ तो } \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ ज्ञात}$$

- कीजिए। 4

8. Attempt any *one* part of the following :

a) Find the solution by matrix method of the following system of equations :

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$$4x - 3y + 2z = 4.$$

8

b) i) If  $y = e^{a \cos^{-1} x}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$

then prove that

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0.$$

4

ii) If  $x = a(\cos t + t \sin t)$  and  $y = a(\sin t - t \cos t)$  then find

$$\frac{d^2 y}{dx^2}$$

4

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$  हो तो सत्यापित

कीजिए कि  $A \cdot \text{adj}(A) = |A| \cdot I$  तथा  $A^{-1}$

ज्ञात कीजिए।

8

ख) दिखाइए कि

$$y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx \text{ जहाँ}$$

$c_1, c_2$  अचर हैं, अवकल समीकरण

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2a \frac{dy}{dx} + (a^2 + b^2)y = 0 \text{ का}$$

हल है।

8

9. Attempt any *one* part of the following :

a) If  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$  then prove that

$$A \cdot \text{adj}(A) = |A| \cdot I \text{ and find } A^{-1}.$$

8

b) Show that

$$y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx,$$

where  $c_1, c_2$  are constants, is a

solution of the differential equation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2a \frac{dy}{dx} + (a^2 + b^2)y = 0.$$

8

324(FJ)- 95,000