

नाम .....

131

324 (FF)

2022

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट ]

[ पूर्णांक : 100

निर्देश :

- प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।
- इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
- सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः उल्लेख किया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
- प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
- प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अंत तक करते जाइए।
- जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) यदि  $L$  किसी समतल में स्थित समस्त सरल रेखाओं का एक समुच्चय है तथा संबंध

$$R = \{(L_1, L_2) : L_1, L_2 \text{ पर लम्ब है}\}$$

समुच्चय  $L$  में परिभाषित है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए :

- |                       |                        |
|-----------------------|------------------------|
| (i) $R$ स्वतुल्य है   | (ii) $R$ सममित है      |
| (iii) $R$ संक्रामक है | (iv) इनमें से कोई नहीं |

1

(ख) यदि आव्यूह  $A$  और  $B$  के क्रम (कोटि) क्रमशः  $m \times n$  और  $n \times p$  हैं, तो  $AB$  का क्रम है :

- |                    |                        |
|--------------------|------------------------|
| (i) $p \times m$   | (ii) $n \times m$      |
| (iii) $m \times p$ | (iv) इनमें से कोई नहीं |

1

(ग) अवकल समीकरण

$$xy \frac{d^2y}{dx^2} + x \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - y \frac{dy}{dx} = 2$$

की घात है :

- |         |        |
|---------|--------|
| (i) 0   | (ii) 1 |
| (iii) 2 | (iv) 3 |

1

(घ) व्यंजक  $\hat{i} \cdot \hat{i} - \hat{j} \cdot \hat{j} + \hat{k} \cdot \hat{k}$  का मान है :

- |         |        |
|---------|--------|
| (i) 0   | (ii) 1 |
| (iii) 2 | (iv) 3 |

1

(ड)  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}}$  का मान होगा : 1

(i) 0 (ii)  $\frac{\pi}{2}$

(iii)  $\frac{\pi}{4}$  (iv)  $\frac{\pi}{8}$

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) फलन  $f: R \rightarrow R$ ,  $f(x) = x^2 \forall x \in R$  द्वारा परिभाषित है, तो फलन  $f$  है : 1

- (i) एकैकी आच्छादक  
(ii) बहु-एक आच्छादक  
(iii) एकैकी, किन्तु आच्छादक नहीं  
(iv) न तो एकैकी और न ही आच्छादक

(ख) यदि  $f: R \rightarrow R$  जहाँ  $f(x) = \cos x$  और  $g: R \rightarrow R$  जहाँ  $g(x) = x^2$ , तो सिद्ध कीजिए कि  $f \circ g \neq g \circ f$ . 1

(ग)  $\cot^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  का मुख्य मान होगा : 1

(i)  $\frac{\pi}{3}$  (ii)  $\frac{\pi}{6}$

(iii)  $\frac{2\pi}{3}$  (iv) इनमें से कोई नहीं

(घ) सिद्ध कीजिए कि फलन  $f(x) = |x|$ ,  $x = 0$  पर संतत है। 1

(ड) यदि  $\Delta ABC$  के शीर्ष  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(1, 2, 3)$  और  $C(2, 3, 1)$  हों, तो  $\Delta ABC$  का क्षेत्रफल वर्ग इकाई में है : 1

(i)  $\frac{\sqrt{21}}{2}$  (ii)  $\frac{\sqrt{22}}{3}$

(iii)  $\frac{\sqrt{23}}{3}$  (iv) इनमें से कोई नहीं

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क)  $y - x \frac{dy}{dx} = a \left( y^2 + \frac{dy}{dx} \right)$  को हल कीजिए। 2

(ख) यदि  $f: A \rightarrow B$  तथा  $g: B \rightarrow C$  एकैकी हैं, तो सिद्ध कीजिए कि  $g \circ f: A \rightarrow C$  भी एकैकी होगा। 2

(ग) यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$  तथा  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ , तो

$AB$  तथा  $BA$  का मान ज्ञात कीजिए। 2

(घ) सिद्ध कीजिए कि  $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ . 2

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) यदि  $\Delta ABC$  के शीर्ष  $A(2, -6)$ ,  $B(5, 4)$ ,  $C(k, 4)$  और उसका क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो, तो सिद्ध कीजिए कि  $k$  का मान 12, -2 होगा। 2

(ख) यदि  $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$  हो, तो  $x$  का मान ज्ञात कीजिए। 2

(ग) सारणिक  $\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$  का मान ज्ञात कीजिए। 2

(घ) सिद्ध कीजिए कि दिए हुए सम्पूर्ण पृष्ठ और महत्तम आयतन वाले लम्ब-वृत्तीय शंकु का अर्ध-शीर्ष कोण  $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$  होता है। 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

(क) दो वृत्तों  $x^2 + y^2 = 4$  एवं  $(x-2)^2 + y^2 = 4$  के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

(ख) समाकल  $\int \frac{x^4 dx}{(x-1)(x^2+1)}$  ज्ञात कीजिए। 5

(ग) हल कीजिए : 5

$$(1+y^2) dx = (\tan^{-1} y - x) dy$$

(घ) दर्शाए कि :

5

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

(ङ) आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$  को एक सममित

आव्यूह तथा एक विषम-सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए। 5

(च) सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos^{-1} x$$

जहाँ  $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$ . 5

6. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि : 5

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2$$

(ख) यदि एक समतल द्वारा निर्देशांक अक्षों पर अन्तःखण्ड

क्रमशः  $a, b, c$  हैं और इसकी मूल-बिन्दु से दूरी  $p$  है,

तो सिद्ध कीजिए कि  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}$ . 5

(ग) यदि  $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$ , तो सिद्ध कीजिए कि  $x + y + z = xyz$ . 5

(घ) अवकल समीकरण

$$\left[ x \sin^2\left(\frac{y}{x}\right) - y \right] dx + x dy = 0,$$

$y = \frac{\pi}{4}$  यदि  $x = 1$  को हल कीजिए। 5

(ङ) सिद्ध कीजिए कि : 5

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2}$$

(च)  $P(A \cup B)$  ज्ञात कीजिए यदि  $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$

और  $P(A|B) = \frac{2}{5}$  है। 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) (i) यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ , तो सिद्ध कीजिए कि

$$A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0. \quad 4$$

(ii) वक्र  $y = x^3 + 2x + 6$  के उन अभिलंबों के समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखा  $x + 14y + 4 = 0$  के समांतर हैं। 4

(ख) (i) फलन  $f(x) = \begin{cases} x & \text{यदि } x \leq 1 \\ 5 & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$

द्वारा परिभाषित है तो क्या  $f, x = 0, x = 1$  तथा  $x = 2$  पर संतत है? 4

(ii) यदि  $y = e^{a \cos^{-1} x}, -1 \leq x \leq 1$ , तो

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0. \quad 4$$

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) प्रारंभिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए : 8

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

(ख) रेखाओं  $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$  और

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$$

के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 8

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) दिए गए आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  के लिए

सत्यापित कीजिए कि  $A \cdot (\text{adj } A) = |A| I$  और इसका व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। 8

- (ख) सिद्ध कीजिए कि  $R$  त्रिज्या के गोले के अंतर्गत विशालतम लम्ब-वृत्तीय शंकु का आयतन गोले के आयतन का  $\frac{8}{27}$  होता है।

8

(English Version)

**Instructions :**

- (i) First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.
- (ii) There are in all **nine** questions in this question paper.
- (iii) **All** questions are compulsory.
- (iv) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.
- (v) Marks allotted to the questions are indicated against them.
- (vi) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- (vii) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. Attempt **all** parts of the following :

- (a) If  $L$  is a set of all straight lines in any plane and relation  $R = \{(L_1, L_2) : L_1 \text{ is perpendicular to } L_2\}$  is defined in  $L$ . Select the correct answer from the following :
- |                         |                       |
|-------------------------|-----------------------|
| (i) $R$ is reflexive    | (ii) $R$ is symmetric |
| (iii) $R$ is transitive | (iv) None of these    |

324 (FF)

9

P.T.O

- (b) If the order of matrices  $A$  and  $B$  are respectively  $m \times n$  and  $n \times p$ , then the order of  $AB$  is :

1

- |                    |                    |
|--------------------|--------------------|
| (i) $p \times m$   | (ii) $n \times m$  |
| (iii) $m \times p$ | (iv) None of these |

- (c) The degree of the differential equation

$$xy \frac{d^2 y}{dx^2} + x \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - y \frac{dy}{dx} = 2 \text{ is :}$$

1

- |         |        |
|---------|--------|
| (i) 0   | (ii) 1 |
| (iii) 2 | (iv) 3 |

- (d) The value of the expression

$$\hat{i} \cdot \hat{i} - \hat{j} \cdot \hat{j} + \hat{k} \cdot \hat{k} \text{ is :}$$

1

- |         |        |
|---------|--------|
| (i) 0   | (ii) 1 |
| (iii) 2 | (iv) 3 |

- (e) The value of  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}}$  will be :

1

- |                       |                      |
|-----------------------|----------------------|
| (i) 0                 | (ii) $\frac{\pi}{2}$ |
| (iii) $\frac{\pi}{4}$ | (iv) $\frac{\pi}{8}$ |

324 (FF)

10

2. Attempt **all** parts of the following :

(a) The function  $f: R \rightarrow R$ ,  $f(x) = x^2 \forall x \in R$  is defined, then  $f$  is : 1

- (i) one-one onto
- (ii) many-one onto
- (iii) one-one, but not onto
- (iv) neither one-one nor onto

(b) If  $f: R \rightarrow R$  where  $f(x) = \cos x$  and  $g: R \rightarrow R$  where  $g(x) = x^2$ , then prove that  $fog \neq gof$ . 1

(c) The principal value of  $\cot^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  will be : 1

- (i)  $\frac{\pi}{3}$                       (ii)  $\frac{\pi}{6}$
- (iii)  $\frac{2\pi}{3}$                       (iv) None of these

(d) Prove that the function  $f(x) = |x|$  is continuous at  $x = 0$ . 1

(e) The area of  $\Delta ABC$ , whose vertices are  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(1, 2, 3)$  and  $C(2, 3, 1)$  in square units is : 1

- (i)  $\frac{\sqrt{21}}{2}$                       (ii)  $\frac{\sqrt{22}}{3}$
- (iii)  $\frac{\sqrt{23}}{3}$                       (iv) None of these

3. Attempt **all** parts of the following :

(a) Solve  $y - x \frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$ . 2

(b) If  $f: A \rightarrow B$  and  $g: B \rightarrow C$  are one-one, then prove that  $gof: A \rightarrow C$  is also one-one. 2

(c) If  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$  and  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ , then

find  $AB$  and  $BA$ . 2

(d) Prove that  $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ . 2

4. Attempt **all** parts of the following :

(a) If vertices of  $\Delta ABC$  are  $A(2, -6)$ ,  $B(5, 4)$  and  $C(k, 4)$  and if the area of  $\Delta ABC$  be 35 square units, then prove that the value of  $k$  will be 12, -2. 2

(b) If  $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$ , then find the value of  $x$ . 2

(c) Find the value of the determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$$

- (d) Show that the semi-vertical angle of right circular cone of given total surface and maximum volume is  $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ . 2

5. Attempt any **five** parts of the following :

- (a) Find the area between region of two circles  $x^2 + y^2 = 4$  and  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ . 5

- (b) Find the integral  $\int \frac{x^4 dx}{(x - 1)(x^2 + 1)}$ . 5

- (c) Solve : <https://www.upboardonline.com>  $(1 + y^2) dx = (\tan^{-1} y - x) dy$  5

- (d) Show that : 
$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$
 5

- (e) Express the matrix  $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$  as the sum of a symmetric and a skew symmetric matrix. 5

- (f) Prove that : 
$$\tan^{-1} \left[ \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos^{-1} x,$$
 where  $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$ . 5

6. Attempt any **five** parts of the following :

- (a) Prove that : 5

$$\begin{vmatrix} a^2 + 1 & ab & ac \\ ab & b^2 + 1 & bc \\ ca & cb & c^2 + 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$$

- (b) If  $a, b, c$  are the intercepts on coordinate axes respectively by a plane and its distance from the origin is  $p$ , then prove that  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}$ . 5

- (c) If  $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$ , then prove that  $x + y + z = xyz$ . 5

- (d) Solve the differential equation

$$\left[ x \sin^2 \left( \frac{y}{x} \right) - y \right] dx + x dy = 0,$$

$$y = \frac{\pi}{4} \text{ if } x = 1. \quad 5$$

- (e) Prove that  $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2}$ . 5

- (f) Find  $P(A \cup B)$ , if  $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$  and

$$P(A|B) = \frac{2}{5}. \quad 5$$

7. Attempt any **one** part of the following :

- (a) (i) If  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ , then prove that  
 $A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0.$  4
- (ii) Find the equations of the normals, to the curve  $y = x^3 + 2x + 6$ , which are parallel to the line  $x + 14y + 4 = 0.$  4

- (b) (i) Is the function  $f$  defined by  
 $f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \leq 1 \\ 5 & \text{if } x > 1 \end{cases}$  continuous at  
 $x = 0, x = 1$  and  $x = 2$ ? 4
- (ii) If  $y = e^a \cos^{-1} x, -1 < x < 1$ , then  
 $(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2y = 0.$  4

8. Attempt any **one** part of the following :

- (a) By using elementary transformation, find the inverse of the following matrix : 8  
 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$
- (b) Find the shortest distance between the lines  $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$  and  $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}.$  8

9. Attempt any **one** part of the following :

- (a) Verify :  $A \cdot (\text{adj } A) = |A| I$  for the given matrix  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  and find its inverse. 8
- (b) Prove that the volume of the largest right circular cone that can be inscribed in a sphere of radius  $R$  is  $\frac{8}{27}$  of the volume of the sphere. 8

<https://www.upboardonline.com>

Whatsapp @ 9300930012

Send your old paper & get 10/-

अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से